Interrogation 7 - Correction

Trigonométrie (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est : } \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Nombres complexes (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $x^2 + x + 1 = 0$.
On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Pour cette équation, $\Delta = 1 - 4 = -3$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$x_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
et $x_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est : } \left\{ e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}}$$

Statistique descriptive (2 points)

Ecrire une fonction Python **moyenne** qui prend en argument une liste de nombres L (supposée non vide) et qui renvoie la moyenne des éléments de L.

```python
def moyenne(L):
    s = 0
    for e in L :
        s += e
    return s / len(L)
```

Suites réelles usuelles (4 points)

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\, u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1. Pour tout $\in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

---

1. • Point fixe

   On résout dans $\mathbb{R}$: $x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

   • Suite auxiliaire

   On définit (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = u_n - \dfrac{1}{4}$.

   (v_n) est alors géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

   • Terme général

   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{2}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + (n+1) \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n = -\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2}}$$

Nombres réels, applications, fonctions réelles usuelles (3 points)

On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \ln\left(\,|x^2 - 1|\,\right)$$

où x désigne un nombre réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Démontrer que f est paire.
3. Justifier que f n'est pas injective.

---

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad |x^2-1| > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \neq 0 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}}$
2. D est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in D$.
   $f(-x) \;=\; \ln\left(\,|(-x)^2 - 1|\,\right) \;=\; \ln\left(\,|x^2 - 1|\,\right) \;=\; f(x)$
   $\boxed{f \text{ est paire.}}$
3. Par parité de f, $f(2) = f(-2)$.
   Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

Matrices, systèmes linéaires et géométrie (6 points)

Dans cet exercice, m désigne un paramètre réel quelconque et on se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que $A_m = \begin{pmatrix} -(5+m) & 3 \\ 6 & -(2+m) \end{pmatrix}$ soit inversible.
2. Dans cette question, on se place dans le cas où A_m est inversible. Déterminer A_m^{-1}.
3. Dans cette question, on se place dans les cas où A_m n'est pas inversible.
   (a) Résoudre $(S_m) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} -(5+m)x & + & 3y & = & 0 \\ 6x & - & (2+m)y & = & 0 \end{array} \right.$
   (b) Interpréter géométriquement.

---

1. Soit $m \in \mathbb{R}$.
   $\det(A_m) \; = \; (5+m)(2+m) - 18 \; = \; 10 + 7m + m^2 - 18 \; = \; m^2 + 7m - 8$
   Les racines de ce polynôme sont 1 et -8.
   $\boxed{A_m \text{ est inversible si et seulement si } m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -8\}}$
2. $\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R} \setminus \{1,-8\} \text{ alors } A_m^{-1} = \dfrac{1}{m^2+7m-8} \begin{pmatrix} -(2+m) & -3 \\ -6 & -(5+m) \end{pmatrix}}$
3. (a)
   - Si $m = 1$
     $(S_1) \; \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6x & + & 3y & = & 0 \\ 6x & - & 3y & = & 0 \end{array} \right. \; \Leftrightarrow \; y = 2x$
     $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_1) \text{ est } \Big\{ (x, 2x) \mid x \in \mathbb{R} \Big\} .}$
   - Si $m = -8$
     $(S_1) \; \Leftrightarrow \; \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 6x & + & 6y & = & 0 \end{array} \right. \; \Leftrightarrow \; x = -y$
     $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (S_1) \text{ est } \Big\{ (x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \Big\} .}$

   (b) $\boxed{\text{Si } m = 1 \text{ et } m = -8 \text{ alors les droites d'équations } -(5+m)x + 3y = 0 \text{ et } 6x - (2+m) = 0 \text{ sont confondues.}}$

Dérivées, primitives et intégrales (3 points)

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\,dt$.
On admet que I est bien définie.
Calculer I en utilisant le changement de variable $u = \sin(t)$.

Le changement de variable est dérivable de dérivée continue.

- Bornes

t	u
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

- $u = \sin(t)$ donc $\dfrac{du}{dt} = \cos(t)$ c'est-à-dire $du = \cos(t)\,dt$
- $\cos^3(t)\,dt = \cos^2(t)\,\cos(t)\,dt = (1 - \sin^2(t))\,\cos(t)\,dt = (1 - u^2)\,du$

D'où :
$$I = \int_0^1 (1 - u^2)\,du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3}$$
C'est-à-dire : $\boxed{I = \dfrac{2}{3}}$

Equations différentielles linéaires (3 points)

Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y' - 2y = 5$ sur $\mathbb{R}$.

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- Equation homogène
  L'ensemble des solutions de (E_0) est :
  $$\left\{ \begin{array}{llll} Y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & Ke^{2t} \end{array} , \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$
- Solution particulière
  La fonction constante égale à $-\dfrac{5}{2}$ est solution de (E).
- Conclusion

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est : } \left\{ \begin{array}{llll} Y : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & Ke^{2t} - \dfrac{5}{2} \end{array} , \quad K \in \mathbb{R} \right\}}$$

Logique, raisonnements et ensembles (5 points)

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = (n+1)\,u_{n+1} - (n+2)\,u_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = -1 + n(n-1)$.

- Initialisation : pour $n = 0$ et pour $n = 1$

  → pour $n = 0$: $-1 + 0\,(0-1) = -1 = u_0$
  → pour $n = 1$: $-1 + 1(1-1) = -1 = u_1$
  Donc la propriété est initialisée.

- Hérédité
  On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = -1 + n(n-1)$ et $u_{n+1} = -1 + (n+1)n$
  Le but est de montrer que :
  $$\begin{aligned} u_{n+2} &= -1 + (n+2)(n+2-1) \\ &= -1 + (n+2)(n+1) \\ &= n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$
  Or :
  $$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n && \text{(définition de la suite)} \\ &= (n+1)\Big(-1 + (n+1)n\Big) - (n+2)\Big(-1 + n(n-1)\Big) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1)\,(n^2 + n + 1) - (n+2)\,(n^2 - n - 1) \\ &= n^3 + n^2 - n + n^2 + n - 1 - \Big(n^3 - n^2 - n + 2n^2 - 2n - 2\Big) \\ &= n^3 + 2n^2 - 1 - n^3 - n^2 + 3n + 2 \\ &= n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$
  C'est ce qu'on voulait.

- Conclusion
  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = -1 + n(n+1)}$