Suites réelles

Généralité

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Le produit de deux suites majorées est majoré.
2. Une suite non décroissante est croissante.
3. Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
4. La somme de deux suites divergentes est divergente.
5. Il existe une suite (u_n) divergente telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
6. Une suite divergente est non bornée.
7. Une suite non bornée est divergente.
8. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.

Limites

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calculer, si elle existe, la limite de (u_n).

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{3n^2-2n+1}{n^6+2n^4+9}$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$.

Exercice 3

On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.
2. La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 4

Etudier la convergence de la suite (S_n) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+k^2}$$

Exercice 5

On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k}$$

La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 6

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

1. Etablir que (H_n) est monotone.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $H_{2n}-H_n\geqslant\dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=+\infty$.

Exercice 7

Soit $x\in[0\,,1[$ fixé.
On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge.
2. Comment peut-on utiliser Python pour obtenir une valeur approchée de $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$?

Exercice 8

On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

La suite (u_n) admet-elle une limite ?
Indication : on pourra considérer les suites extraites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) .

Exercice 9

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ \forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{nn!}\end{cases}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. A l'aide de Python, illustrer graphiquement le résultat précédent.

Exercice 10

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=0$, $v_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{3u_n+v_n}{4}\quad\text{et}\quad v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune.
Indication : on pourra considérer les suites (u_n-v_n) *et* (u_n+v_n).

Suites récurrentes

Exercice 11

On définit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(1 + u_n^2\Big) \end{cases}$$

1. On définit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\Big(1 + x^2\Big)$ où x désigne un réel.
   Etudier la fonction f et donner l'allure de sa représentation graphique. On fera apparaître sur le dessin la droite d'équation $y = x$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n$.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 12

Dans l'exercice précédent, on prend cette fois-ci $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 13

Etudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \end{cases}$$

On pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$".

Exercice 14

Etudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

On pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n existe et $1 \leqslant u_n$".

Exercice 15

Etudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} \end{cases}$$

On pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n$.

Exercice 16

Etudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Comparaisons asymptotiques

Exercice 17

Déterminer une équivalent simple puis la limite des suites de terme général :

1. $u_n = n^2 - n$
2. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$
4. $u_n = n^2 \ln\Big(1 + e^{-n}\Big)$
5. $u_n = \ln\Big(\cos(\dfrac{1}{n})\Big)$

Exercice 18

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$

Exercice 19

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 21

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose :

$$a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = 2^n \tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Rappeler la formule de duplication du sinus.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tan(x)$ existe et $\tan(2x)$ existent.
   Démontrer que $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$.
2. (a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   (b) Déterminer la valeur de leur limite commune.