

Devoir Surveillé n°4 - Partie 1 - Informatique

Samedi 18 janvier 2025 - Durée : 30 minutes

L'usage de la calculatrice est interdit.

Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.

Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.

Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Dans ces deux exercices, les programmes sont à rédiger en langage Python.

Exercice 1

On suppose que le fichier Python débute par l'importation du module `numpy` de la façon suivante :

```
1 import numpy as np
```

On modélise les notes de colle du premier semestre d'une classe de BCPST par un tableau. Les étudiants sont numérotés à partir du numéro 0 ; les notes de l'étudiant numéro i sont représentées par la ligne d'indice i du tableau. Les semaines de colle sont numérotées à partir de 0 ; les notes de la semaine de colle numéro j sont représentées par la colonne d'indice j du tableau.

Ainsi, ces notes peuvent par exemple être représentées par un tableau similaire à celui défini ci-dessous :

```
1 exemple = np.array ([
2 [14,12,12],
3 [11,13,12],
4 [10,10,10],
5 [16,14,13],
6 [12,12,15],
7 [12,10,11]))
```

Dans cet exemple, la classe comporte 6 étudiants numérotés de 0 à 5 et il y a eu 3 semaines de colles numérotées de 0 à 2. L'étudiant numéro 0 a reçu les notes 14, 12 et 12. Lors de la semaine de colle numéro 0, les notes obtenues ont été 14, 11, 10, 16, 12, 12.

Dans tout cet exercice, il est demandé d'écrire des fonctions Python qui prennent en argument un tableau T représentant des notes de la façon décrite ci-dessus, et éventuellement d'autres arguments qui seront précisés.

1. Ecrire une fonction Python **moyenne_etudiant** qui prend en arguments un tableau T et un indice i représentant un étudiant et qui renvoie la moyenne obtenue par cet étudiant au cours du semestre.
2. Ecrire une fonction python **moyenne_classe** qui prend en argument un tableau T et qui renvoie la moyenne de la classe au cours du semestre.
3. Ecrire une fonction Python **seuil_etudiant** qui prend en arguments un tableau T et un indice i représentant un étudiant et qui renvoie **True** si cet étudiant a obtenu au moins une note supérieure ou égale à 15 et **False** sinon.
4. Ecrire une fonction Python **seuil_classe** qui prend en argument un tableau T et qui renvoie la liste des indices correspondant aux étudiants ayant obtenu au moins une note supérieure ou égale à 15.

On pourra réutiliser la fonction précédente.

Exercice 2

On définit la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le fichier Python débute par l'importation du module **numpy** et par la définition du tableau **N** de la façon suivante :

```
1 import numpy as np
2
3 N = np.array([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [0, 0, 0]])
```

De plus, l'annexe à la fin du sujet comporte des rappels sur les commandes utiles.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer $A(a)$ en fonction de I_3 , a et N .
 - Ecrire une fonction Python **matrice_A** qui prend en argument un réel a et qui renvoie la matrice $A(a)$.
- Ecrire une fonction Python **nulle** qui prend en argument une matrice carrée M et un entier naturel k et qui renvoie **True** si la matrice M^k est la matrice nulle et **False** sinon.
 - L'exécution de la fonction précédente pour la matrice N avec $k \in \{1, 2, 3\}$ produit l'affichage suivant :

```
>>> nulle(N,1)
False

>>> nulle(N,2)
False

>>> nulle(N,3)
True
```

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $A(1)^n$ en fonction de n , I_3 , N et N^2 .

Annexe

Le tableau suivant résume les opérations usuelles que l'on peut effectuer sur les tableaux :

Python	Interprétation
$A+B$	Somme terme à terme de A et B
$k*A$	Tous les coefficients de A sont multipliés par le nombre k
$\text{np.dot}(A,B)$	Produit matriciel AB
$\text{np.linalg.matrix_power}(A,n)$	Puissance A^n