Devoir Surveillé n°4 - Partie 2 - Mathématiques

Samedi 18 janvier 2025 - Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides).

On pourra répondre aux questions suivantes sans simplifier les résultats.

1. Combien peut-on former de telles grilles différentes ?
2. (a) Combien de grilles n'ont aucune case noire dans un coin ?
   (b) Combien de grilles ont au plus deux cases noires dans des coins ?
   (c) Combien de grilles ont au moins une case noire dans la première ligne ?
   (d) Combien de grilles ont une seule case noire dans la dernière ligne et une seule case noire dans la première colonne ?
3. Combien y a-t-il de façons différentes de remplir l'une de ces grilles (avec l'alphabet latin, sans accent, avec des mots n'ayant pas nécessairement de sens) ?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n existe.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
4. En déduire que $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Pour tout l'exercice, on se place dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Etant données deux parties non vides A et B de $\mathcal{E}$, on appelle distance entre A et B la borne inférieure des $||\overrightarrow{MN}||$ pour M parcourant l'ensemble A et N parcourant l'ensemble B. Elle est notée $\Delta(A, B)$.

Les parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on note M le point de coordonnées $(1, -1, 1)$.

On note aussi d la droite passant par $A(1, 0, 1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif est de calcul $\Delta(\{M\}, d)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite d.
2. On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 6t^2 + 2t + 1 \end{array}$$

   Justifier que f admet un minimum et expliciter la valeur de ce minimum. Dans la suite, on la note α.
3. Montrer que, pour tout $N \in d$, il existe $t_N \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(t_N) = ||\overrightarrow{MN}||^2$.
4. En déduire que, pour tout $N \in d$, $||\overrightarrow{MN}|| \geqslant \sqrt{\alpha}$.
5. Montrer qu'il existe $H \in d$ vérifiant $||\overrightarrow{MH}|| = \sqrt{\alpha}$ et en déduire la valeur de $\Delta(\{M\}, d)$.

Partie B

Dans cette partie, on note M le point de coordonnées $(0, 2, 1)$et P le plan ayant comme représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & t & + & 2s \\ y & = & 0 & - & t & + & s \\ z & = & 2 & - & t & - & s \end{array} \right. \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer une équation cartésienne de P.
2. Déterminer les coordonnées de l'unique point H de P tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à P.
3. Montrer que, pour tout point N de P :

$$||\overrightarrow{MN}||^2 = ||\overrightarrow{MH}||^2 + ||\overrightarrow{HN}||^2$$

4. En déduire la valeur de $\Delta(\{M\}, P)$.

Partie C

Dans cette partie, on note d_1 la droite passant par les points $A(2, 1, 2)$ et $B(1, 0, 1)$ et d_2 la droite qui est l'intersection des plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : x + 2y + z + 1 = 0$$

$$P_2 : x - y - z - 1 = 0$$

1. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_1 .
   (b) Faire de même pour la droite d_2 .
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ orthogonal à la fois à d_1 et à d_2 .
3. Déterminer les coordonnées du point H appartenant à d_1 et du point K appartenant à d_2 tels que $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires.
4. Justifier brièvement que $||\overrightarrow{HK}|| \geqslant \Delta(d_1, d_2)$.
5. Montrer que, pour tout point $M \in d_1$ et tout point $N \in d_2$, on a :

$$||\overrightarrow{MN}||^2 = ||\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}||^2 + ||\overrightarrow{HK}||^2$$

6. En déduire la valeur de $\Delta(d_1, d_2)$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(\mathsf{E}_1) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f'(x) + f(-x) = x^2$$

Soit f une solution de (E_1).

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que f est solution de :

$$(\mathsf{E}_2) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f''(x) + f(x) = 2x + x^2$$

2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = 2x + x^2$ d'inconnue la fonction y définie sur $\mathbb{R}$.
   On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2.
3. En déduire qu'il existe A réel tel que f soit de la forme $f : x \mapsto A\Big(\cos(x) - \sin(x)\Big) + x^2 + 2x - 2$.