Semaine 15 - Lundi 27 janvier au vendredi 31 janvier

Chap 16 - Suites réelles

I/ Généralités

- Définitions : suite réelle, somme, produit, produit par un scalaire, quotient
- Définitions : suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, constante, monotone, et toutes ces notions "à partir d'un certain rang"
- Définitions : suite majorée, minorée, bornée
- Proposition : (u_n) est bornée ssi $(|u_n|)$ est majorée

II/ Limites

1. Convergence, divergence
   - Définition de "(u_n) converge vers le réel l", notations $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$
   - Proposition : si une suite converge, alors sa limite est unique
   - Proposition : si une suite converge, alors elle est bornée
   - Proposition : (u_n) converge vers l ssi $(u_n - l)$ converge vers 0
   - Définitions : divergence, divergence vers $+\infty$, divergence vers $-\infty$, et notations associées
   - Proposition : si une suite a une limite, alors cette limite est unique
2. Limites et opérations
   - Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de $(f(u_n))$
3. Suites extraites
   - Proposition : (u_n) a une limite $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite a.
4. Limites et inégalités
   - Proposition : signe d'une suite de limite non nulle
   - Proposition : passage à la limite dans une inégalité large
   - Théorème de la limite finie par encadrement (dit théorème des gendarmes)
   - Théorème de comparaison (pour les limites infinies)
5. Limites et monotonie
   - Théorème de la limite monotone
6. Suites adjacentes
   - Définition
   - Théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite

III/ Suites récurrentes définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On ne donne aucun résultat général et un plan d'étude est toujours proposé.

1. Cas où f est croissante
   - Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$
2. Cas où f est décroissante
   - Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$

IV/ Comparaisons asymptotiques

1. Croissances comparées
   - Définition : suite négligeable devant une autre, notation $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
   - Proposition : croissances comparées de $(\ln n)^\beta$ $(\beta > 0)$, n^α $(\alpha > 0)$, a^n $(a > 1)$ et $n!$
2. Suites équivalentes
   - Définition : suites équivalentes, notation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   - Propriétés des équivalents : symétrie, réflexivité, transitivité et lien avec les limites
   - Opérations sur les équivalents : multiplication, quotient, élévation à une puissance fixée
   - Equivalents usuels : un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré
   - Equivalents usuels : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors équivalents de $e^{u_n} - 1$, $\ln(1+u_n)$, $(1+u_n)^\alpha - 1$, $\sqrt{1+u_n} - 1$, $\dfrac{1}{1+u_n} - 1$, $\sin(u_n)$, $\cos(u_n) - 1$ et $\tan(u_n)$

Informatique

Tout ce qui a été vu reste au programme.

Questions de cours

1. *Sans preuve.*
   Limite d'une somme, d'un produit et de $(f(u_n))$.
2. *Sans preuve.*
   Enoncer le théorème de limite finie par encadrement, le théorème de comparaison et le théorème de la limite monotone (version détaillée).
3. *Sans preuve.*
   Enoncer le critère des suites extraites, donner la définition de suites adjacentes et énoncer le théorème des suites adjacentes.
4. *Sans preuve.*
   Donner la définition de deux suites équivalentes, ainsi que la proposition sur les opérations sur les équivalents (multiplication, division, puissance fixée).
5. *Sans preuve.*
   Enoncer la proposition sur les équivalents usuels.