Suites réelles - Correction

Exercice 1 (Correction rapide)

Il faut trouver :

1. Faux.
   Contre-exemple : $u_n = -n$ et $v_n = -n$.
2. Faux.
   Contre-exemple : $u_{2p} = 2p$ et $u_{2p+1} = 2p - \dfrac{1}{2p}$
3. Faux.
   Contre-exemple : $u_{2p} = \dfrac{1}{2p}$ et $u_{2p+1} = \dfrac{1}{2p} + \dfrac{1}{2p+1}$
4. Faux.
   Contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = -n$
5. Vrai.
   Exemple : $u_n = \ln(n)$
6. Faux.
   Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$
7. Vrai.
   C'est la contraposée d'une proposition du cours.
8. Faux.
   Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$

Exercice 2

Fait en classe.

Exercice 3

Fait en classe.

Exercice 4

Sera fait en classe. Même méthode que l'exercice 5

Exercice 5 (Correction complète)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & \leqslant & k & \leqslant & n \\
\Leftrightarrow & n^2+1 & \leqslant & n^2+k & \leqslant & n^2+n \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{n^2+1} & \geqslant & \dfrac{1}{n^2+k} & \geqslant & \dfrac{1}{n^2+n} \\
\Rightarrow & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} & \geqslant & u_n & \geqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{n}{n^2+1} & \geqslant & u_n & \geqslant & \dfrac{n}{n^2+n}
\end{array}$$

Or : $\dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{n}{n\left(n+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.
De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+n} = 0$.

D'où, par théorème des gendarmes : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 6

Fait en classe.

Exercice 7 (Correction complète)

1. A cause de la formulation de la question, on souhaite utiliser le théorème de la limite monotone.
Vérifions que les conditions sont remplies :

   - Monotonie
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $u_{n+1} - u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \ = \ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ > \ 0$
   Ceci prouve que (u_n) est strictement croissante.
   Donc, par le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite.
   - Majoration
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et on cherche à majorer cette somme par un majorant *qui ne dépend pas de* n.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   $$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant k \leqslant n \\ \Rightarrow & 1 \leqslant k! \leqslant n! \\ \Rightarrow & \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{k!} \leqslant 1 \\ \Rightarrow & \frac{x^k}{k!} \leqslant x^k \end{array}$$
   D'où, en sommant :
   $u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} x^k$ ... qui n'est pas un majorant valable, puisque ceci dépend encore de n.
   Mais : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ (possible car $x \neq 1$)
   Or : $x \in [0, 1[$ donc $x^{n+1} < 1$ donc $1 - x^{n+1} < 1$.
   Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leqslant \frac{1}{1 - x}$, et cette quantité ne dépend pas de n, ce qui prouve que (u_n) est majorée.
   - Conclusion
   D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

2. On propose :

```
def suite(x,n):
    S = 0
    factorielle = 1
    for k in range(0,n+1):
        S+= (x**k)/factorielle
        factorielle = factorielle*(k+1)
    return S
```

Exercice 8 (Correction complète)

Tout d'abord, ceci est un exercice qui est fait pour être commencé en classe. Un questionnement habile de la prof doit vous amener à penser que la bonne idée est de démontrer que les suites extraites sont adjacentes.

- Monotonie de (u_{2n})

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} - u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \\ &= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0 \end{aligned}$$

  Donc (u_{2n}) est croissante.

- Monotonie de (u_{2n+1})

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3-1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

  Donc (u_{2n+1}) est décroissante.

- Différence

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

  $u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$

- Conclusion

  Les trois points précédents prouvent que les suites extraites sont adjacentes.

  Ainsi, d'après le théorème des suites adjacentes, (u_{2n+1}) et (u_{2n}) convergent vers une même limite.

  Donc, d'après le critère des suites extraites, $\boxed{(u_n) \text{ admet une limite}}$.

  Et on peut même dire que c'est une limite réelle.

Exercice 9 (Correction complète ; la question 2 est difficile)

On commence par signaler une erreur d'énoncé : les suites sont seulement définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ (à cause de la fraction dans la formule définissant v_n).

1. On démontre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

   - Monotonie de (u_n)
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$
     Donc la suite (u_n) est croissante.
   - Monotonie de (v_n)
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} \right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} \\ &= \frac{n\,(n+1) + n - (n+1)\,(n+1)}{(n+1)\,n\,(n+1)!} \qquad \textbf{(*)} \\ &= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)\,n\,(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{(n+1)\,n\,(n+1)!} \end{aligned}$$
     (*) A cette ligne, il est important d'optimiser le dénominateur si on veut que les calculs restent raisonnables.
     Ainsi, $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite (v_n) est décroissante.
   - Limite de la différence
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     $$v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
   - Conclusion
     Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
     Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite.}}$

2. On propose :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def illustration(n):
    X = [i for i in range(1,n+1)]
    u = 1                   #terme pour k=0
    U = []
    V = []
    factorielle = 1       #factorielle de 0
    for k in range(1,n+1):
        factorielle = factorielle*k
        u = u + (1/factorielle)
        U.append(u)
        v = u + 1 / (k*factorielle)
        V.append(v)
    plt.plot(X,U,'r.')
    plt.plot(X,V,'b.')
    plt.show()
```

Exercice 10 (Correction complète)

- Monotonie de (u_n)
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{4}$
  Et pour l'instant on ne sait pas quoi en faire...

- Monotonie de (v_n)
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4}$.
  Et pour l'instant on ne sait pas quoi en faire... Mais ça fait deux fois qu'on tombe sur une des suites de l'indication.

- Etude de $(u_n - v_n)$
  → Brouillon
  On ne sait pas quoi faire d'autre, donc on commence à calculer :
  $u_0 - v_0 = -2$
  $u_1 - v_1 = \dfrac{3u_0 + v_0}{4} - \dfrac{u_0 + 3v_0}{4} = \dfrac{2u_0 - 2v_0}{4} = \dfrac{1}{2}(u_0 - v_0)$
  → Au propre
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{4} - \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$
  Donc $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 - v_0 = -2$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -2\,(\dfrac{1}{2})^n$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n < 0$.

- Monotonies de (u_n) et (v_n)
  D'après les calculs précédents, (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

- Différence
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -2\,(\dfrac{1}{2})^n$ et $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

- Conclusion partielle
  $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$

- Valeur de la limite
  On note l la valeur de la limite commune.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4}$.
  D'où, en passant à la limite, $l = \dfrac{3l + l}{4} \;\Leftrightarrow\; 4l = 4l$.
  Et on est bien avancé... Il est peut-être temps d'utiliser la deuxième indication.

- Etude de $(u_n + v_n)$
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} + \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{4u_n + 4v_n}{4} = u_n + v_n$
  Donc la suite $(u_n + v_n)$ est constante, et la valeur de la constante est $u_0 + v_0 = 2$.

- Valeur de la limite
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 2$.
  D'où, en passant à la limite, $2l = 2$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$.

Exercice 11

Fait en classe.

Exercice 12 (Grandes lignes)

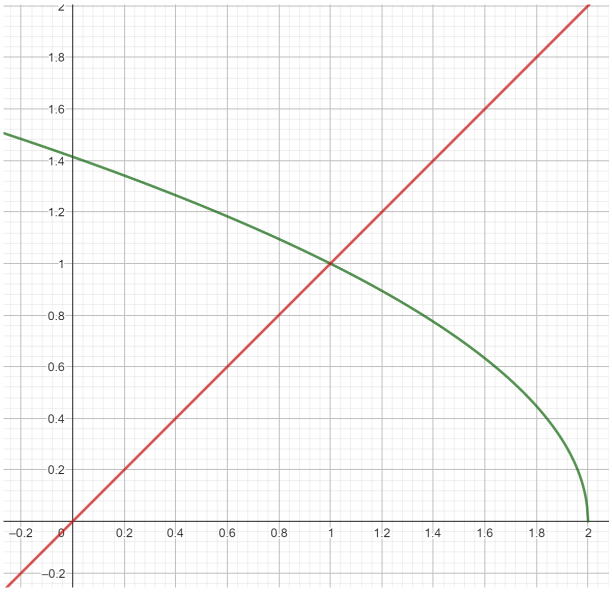
Tout d'abord, l'étude des variations de f reste valable :

- f est strictement décroissante sur $]-\infty\,,\,0]$
- f est strictement croissante sur $[0\,,\,+\infty[$

1. On procède par récurrence
   - Initialisation : pour $n = 0$
     OK
   - Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
     Dès lors : $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ (par croissance de f sur $[0\,,\,+\infty[$)
     C'est-à-dire : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$
     D'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$
2. On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (pas de difficulté)
3. (u_n) est croissante et majorée donc, par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge ; on note l sa limite.
   Par les mêmes calculs que dans l'exercice 11, on trouve $l = 1$.
   Donc (u_n) converge vers 1.

Exercice 13 (Correction complète)

- Fonction associée
  Pour tout l'exercice, on note $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$.
  f est définie sur $I =]-\infty, 2]$.
  De plus, $x \mapsto 2-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
  Donc, en composant par racine qui est strictement croissante, f est strictement décroissante sur I.
- Représentation graphique
  Pour tracer précisément, on commence par résoudre sur I :
  $$\begin{array}{ll} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2-x} = x \\ \Rightarrow & 2-x = x^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 + x - 2 = 0 \end{array}$$
  Les solutions évidentes sont 1 et -2.
  Vérifions si elles conviennent vraiment.
  $f(1) = \sqrt{2-1} = 1$ donc 1 est vraiment solution.
  $f(-2) = \sqrt{2+2} = 2$ donc -2 ne convient pas.



- Conjectures
  A l'aide la représentation graphique, on conjecture que :
  - $\rightarrow$ (u_{2n}) est croissante
  - $\rightarrow$ (u_{2n+1}) est décroissante
  - $\rightarrow$ (u_n) converge vers 1
- Intervalle stable
  On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
  - $\rightarrow$ Initialisation : pour $n = 0$
    u_0 vaut 0 donc u_0 existe et $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$
  - $\rightarrow$ Hérédité
    On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
    D'une part, $u_n \in [0,2]$ donc $u_n \in]-\infty, 2]$ donc $f(u_n)$ existe, c'est-à-dire u_{n+1} existe.
    D'autre part :
    $$\begin{array}{ll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 2 \\ \Rightarrow & f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(2) \quad (f \text{ est décroissante sur }]-\infty, 2]) \\ \Rightarrow & \sqrt{2} \geqslant u_{n+1} \geqslant 0 \\ \Rightarrow & 2 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0 \end{array}$$
    C'est ce qu'on voulait
  - $\rightarrow$ Conclusion
    Par récurrence, on a prouvé que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$

- Variations de (u_{2n})
  On démontre par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$
  - → Initialisation
    $u_0 = 0$
    $u_1 = \sqrt{2}$
    $u_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_2 \geqslant u_0$
    Donc la propriété est initialisée.
  - → Hérédité
    On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{2n} \geqslant u_{2n+2}$.
    f est strictement décroissante, donc $f \circ f$ est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$.
    D'où : $f \circ f(u_{2n}) \geqslant f \circ f(u_{2n+2})$
    C'est-à-dire : $u_{2n+4} \geqslant u_{2n+2}$
    C'est ce qu'on voulait
  - → Conclusion
    (u_{2n}) est croissante.
- Variations de (u_{2n+1})
  On procède de même.
  A l'initialisation, on a $u_1 = \sqrt{2} \simeq 1,41$ et $u_3 = \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} \simeq 1,11$
  Donc (u_{2n+1}) est décroissante.
- Limites des suites extraites
  Les deux suites extraites sont monotones et bornées.
  Par le théorème de la limite monotone, elles convergent toutes les deux.
  On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.
  Pour déterminer l, on résout sur $[0, 2]$ (à cause de l'intervalle stable) :

$$
\begin{array}{lll}
 & x = f \circ f(x) & \\
\Leftrightarrow & x = \sqrt{2-f(x)} & \\
\Rightarrow & x^2 = 2 - \sqrt{2-x} & \text{(implication : pas grave)} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{2-x} = 2 - x^2 & \\
\Rightarrow & 2 - x = \left(2-x^2\right)^2 & \text{(implication : pas grave)} \\
\Leftrightarrow & 2 - x = x^4 - 4x^2 + 4 & \\
\Leftrightarrow & x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 & \\
\Leftrightarrow & (x-1)(x+2)(x^2-x-1) = 0 & \text{(racines évidentes)} \\
\Leftrightarrow & x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} &
\end{array}
$$

  On élimine $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ car n'appartient pas à $[0, 2]$.
  On élimine -2 car n'appartient pas à $[0, 2]$.
  On élimine $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ car, d'après la récurrence de l'intervalle stable, (u_{2n}) est en fait majorée par $\sqrt{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}$.
  Il reste : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$.
  De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1$
- Limite de (u_n)
  D'après le critère des suites extraites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

Exercice 14 (Correction complète)

On note f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array}$$

1. Variations de f
   Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$
   D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

2. Intervalle stable
   On montre par récurrence que : "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $1 \leqslant u_n$"
   - Initialisation : pour $n = 0$
     u_0 existe et $u_0 = 1$ donc $u_0 \geqslant 1$
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_n$.
     Tout d'abord, $u_n \in \mathbb{R}^*$ donc $f(u_n) = u_{n+1}$ existe.
     De plus : $f(1) \leqslant f(u_n)$ (par croissance de f sur $[1, +\infty[$)
     C'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1}$.
   - Conclusion
     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leqslant u_n$.
3. Monotonie
   On démontre par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$
   - Initialisation : pour $n = 0$
     $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 + 1 = 2$ donc $u_0 \leqslant u_1$
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
     Dès lors : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ (par croissance de f sur $[1, +\infty[$)
     C'est-à-dire : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$
   - Conclusion
     $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$
4. Limite
   Par le théorème de convergence monotone, (u_n) a une limite qui est soit un réel soit $+\infty$.
   On suppose que (u_n) converge vers un réel l.
   Dans ce cas, $l \in [1, +\infty[$ et l est solution de $f(l) = l$.
   On résout sur $[1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} & f(l) = l \\ \Leftrightarrow\ & l + \frac{1}{l} = l \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{l} = 0 \end{aligned}$$

   Ceci est impossible.
   Donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.

<u>Exercice 15</u> (Grandes lignes, en détaillant les points délicats)

On note f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - e^{-x} \end{array}$$

1. <u>Variations de f</u>
   $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Donc, par composition, $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   D'où, par produit par -1, $x \mapsto -e^{-x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Finalement, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. <u>Intervalle stable.</u>
   On démontre l'indication par récurrence : aucune difficulté.
3. <u>Monotonie</u>
   On démontre par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - <u>Initialisation</u>
     $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 - e^{-1}$.
     Or, par stricte croissance d'exponentielle sur $\mathbb{R}$: $e^{-1} < e^0$, c'est-à-dire $e^{-1} < 1$ d'où $u_1 \leqslant u_0$
   - <u>Hérédité</u>
     Aucune difficulté
   - <u>Conclusion</u>
     $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$
4. <u>Limite</u>
   (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc, par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.
   On note l sa limite.
   Pour déterminer l, on résout sur $[0, +\infty[$:
   $$\begin{array}{rl} & f(l) = l \\ \Leftrightarrow & 1 - e^{-l} = l \end{array}$$
   On ne sait pas résoudre cette équation par les moyens usuels ; on n'arrive jamais à isoler l, il reste toujours soit une exponentielle soit un ln.

   Mais : on commence par constater que 0 est solution évidente. On justifier ensuite que 0 est la seule solution.
   Pour cela, on définit une fonction auxiliaire par :

   $$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - e^{-x} - x \end{array}$$

   Par les théorèmes opératoires, g est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tut $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $g'(x) \ = \ e^{-x} - 1$
   D'où la tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗	0	↘	

   Ainsi, par stricte monotonie de g sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$ qui est 0.
   Enfin, puisque $g(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = x$, on a ce qu'on voulait.
   $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$

<u>Exercice 16</u> (Grandes lignes)

Par récurrence immédiate, (u_n) ne prend que deux valeurs.
Par le critère des suites extraites, (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 17 (Correction très rapide)

question	équivalent	limite
$hline1$	n^2	$+\infty$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{n}$	0
4	n^2e^{-n}	0
5	$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$	0

Exercice 18 (Correction complète)

On a une forme indéterminé.
L'indétermination se lève assez vite concernant le quotient : il tend vers 1. La "vraie" forme indéterminée est le "$\infty \times 0$".

Soit $n \in \mathbb{N}$, n au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \quad (*)
\end{aligned}$$

Comme $\frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{n-1} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n-1}
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) = 1}$.

(*) : à cette ligne et la précédente, si on ne voit pas les astuces de calcul, on peut tout de même s'en sortir.
L'idée est : on veut faire apparaître une forme en $\ln(1+v_n)$ pour utiliser l'équivalent usuel.
On cherche donc au brouillon :

$$\begin{aligned}
& 1+v_n = \frac{n+1}{n-1} \\
\Leftrightarrow\ & v_n = \frac{n+1}{n-1} - 1 \\
\Leftrightarrow\ & v_n = \frac{n+1-(n-1)}{n-1} \\
\Leftrightarrow\ & v_n = \frac{2}{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 19 (Correction très rapide)

Sera fait en classe.

1. e^1
2. e^{-1}
3. e^x

Exercice 20 (Question 1 calculatoire ; question 2 difficile)

1. - Monotonie de (u_n)
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1-2(n+1)+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{n(n+1)}-2n-1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$
   On résout alors :
   $$\begin{aligned} 2\sqrt{n(n+1)}-2n-1>0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} > 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 4n(n+1) > (2n+1)^2 \qquad \text{(tout est positif)} \\ &\Leftrightarrow 4n^2+4n > 4n^2+4n+1 \end{aligned}$$
   Ceci est faux, donc $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.
   - Monotonie de (v_n)
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1-2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}+2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{2n+3-2\sqrt{(n^2+3n+2)}}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$
   On résout alors :
   $$\begin{aligned} 2n+3-2\sqrt{(n^2+3n+2)}<0 &\Leftrightarrow 2n+3 < 2\sqrt{(n^2+3n+2)} \\ &\Leftrightarrow (2n+3)^2 < 4(n^2+3n+2) \qquad \text{((tout est positif)} \\ &\Leftrightarrow 4n^2+12n+9 < 4n^2+12n+8 \end{aligned}$$
   Ceci est faux, donc $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$ et donc (v_n) est croissante.
   - Différence
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$u_n - v_n = -2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$
   - Conclusion
   $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$

2. *Tout d'abord, on n'y arrivera pas à l'aide des équivalents usuels. On revient donc à la définition. On va donc essayer de trouver : par quoi faut-il diviser cette somme pour que la limite vaille 1 ? Cette question est difficile parce qu'elle demande beaucoup d'initiative.*

On note $L \in \mathbb{R}$ la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Comme (u_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$L \leqslant u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad L \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad L + 2\sqrt{n} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Comme (v_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n \leqslant L$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \leqslant L$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant L + 2\sqrt{n+1}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on regroupe :

$$L + 2\sqrt{n} \quad \leqslant \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad \leqslant \quad L + 2\sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{L + 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{L + 2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{L}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{2\sqrt{n}} \quad \leqslant \quad \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{L}{2\sqrt{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{L}{2\sqrt{n}} = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{L}{2\sqrt{n}}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{2\sqrt{n}} = 1$.

Ce qui veut dire que : $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$

Exercice 21 (Grandes lignes)

1. (a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

   (b) $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \cdots = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

2. (a)
   - Monotonie de (a_n)

     $a_{n+1} - a_n = \cdots = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) > 0$
   - Monotonie de (b_n)

     $$b_{n+1} - b_n = \cdots = 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\frac{-\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} < 0$$
   - Différence

     $a_n - b_n = \cdots = 2^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\right)$

     Or : $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2^n}$

     Donc : $2^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi$

     Et : $1-\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   (b) (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux vers π (par équivalents).