Semaine 16 - Lundi 3 février au vendredi 7 février

Chap 16 - Suites réelles

III/ Suites récurrentes définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On ne donne aucun résultat général et un plan d'étude est toujours proposé.

1. Cas où f est croissante
   - Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$
2. Cas où f est décroissante
   - Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$

IV/ Comparaisons asymptotiques

1. Croissances comparées
   - Définition : suite négligeable devant une autre, notation $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
   - Proposition : croissances comparées de $(\ln n)^\beta$ $(\beta > 0)$, n^α $(\alpha > 0)$, a^n $(a > 1)$ et $n!$
2. Suites équivalentes
   - Définition : suites équivalentes, notation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   - Propriétés des équivalents : symétrie, réflexivité, transitivité et lien avec les limites
   - Opérations sur les équivalents : multiplication, quotient, élévation à une puissance fixée
   - Equivalents usuels : un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré
   - Equivalents usuels : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors équivalents de $e^{u_n} - 1$, $\ln(1+u_n)$, $(1+u_n)^\alpha - 1$, $\sqrt{1+u_n} - 1$, $\dfrac{1}{1+u_n} - 1$, $\sin(u_n)$, $\cos(u_n) - 1$ et $\tan(u_n)$

Chap 17 - Polynômes réels

I/ Polynômes et règles de calcul

1. Polynômes
   - Définitions : monôme réel, polynôme réel, coefficients
   - Cas particuliers : polynôme constant, noté $P = a_0$ et polynôme nul, noté $P = 0$
   - Proposition : le seul polynôme constant égal à 0 est le polynôme dont tous les coefficients valent 0, c'est-à-dire le polynôme nul
2. Cas d'égalité
   - Proposition : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (principe d'identification)
3. Opérations sur les polynômes
   - Proposition : la somme de deux polynômes, le produit d'un polynôme par un réel, le produit de deux polynômes et la composée de deux polynômes sont des polynômes
   - Définition : puissances d'un polynôme
4. Degré
   - Définition : degré $\deg(P)$ d'un polynôme non nul, $\deg(0) = -\infty$, coefficient dominant, polynôme unitaire, coefficient constant
   - Proposition : $\deg(P+Q)$, $\deg(\lambda P)$ (si $\lambda \neq 0$ et si $\lambda = 0$), $\deg(PQ)$
   - Proposition : l'ensemble des polynômes réels est intègre
5. Polynôme dérivé
   - Définition : polynôme dérivé, dérivées successives
   - Proposition : si $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$ et sinon $\deg(P') = -\infty$

II/ Racines d'un polynôme

1. Racine et factorisation
   - Définition : $\alpha \in \mathbb{R}$ est racine de P ssi $P(\alpha) = 0$
   - Lemme de Bernoulli
   - Caractérisation : α est racine de $P \Leftrightarrow$ il existe Q polynôme réel tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$
   - Proposition : tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle
2. Racines distinctes

- Proposition : des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ distincts sont racines de $P \Leftrightarrow P$ est factorisable par $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$
- Proposition : un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ a au maximum d racines distinctes
- Proposition : si un polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}$ a d racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, alors P s'écrit sous la forme $P : x \mapsto a_d(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_d)$ avec $a_d \in \mathbb{R}^*$

3. Racines multiples
   - Définitions : multiplicité d'une racine, racine simple, racine double, racine multiple
   - Proposition : α est racine multiple de $P \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$

Informatique

Tout ce qui a été vu reste au programme.

Questions de cours

1. *Sans preuve.*
   Donner la définition de deux suites équivalentes, ainsi que la proposition sur les opérations sur les équivalents (multiplication, division, puissance fixée).
2. *Sans preuve.*
   Enoncer la proposition sur les équivalents usuels.
3. *Avec preuve.*
   L'ensemble des polynômes réels est intègre.
4. *Avec preuve.*
   Enoncer *sans démontrer* le lemme de Bernoulli et en déduire *en démontrant* la caractérisation de "α est une racine de P".
5. *Sans preuve.*
   Enoncer les trois propositions concernant les racines distinctes.