Polynômes réels

Exercice 1

Fait en classe.

Exercice 2 (Correction complète)

1. Pour se faire une idée, on commence par regarder ce qui se passe pour de petites valeurs de n :

   - Pour $n = 0$

     $P_0 = \prod_{k=0}^{0}\left(1+x^{2^k}\right) = 1+x^{2^0} = 1+x$
   - Pour $n = 1$

     $$\begin{aligned} P_1 &= \prod_{k=0}^{1}\left(1+x^{2^k}\right) \\ &= (1+x)(1+x^2) \\ &= 1+x+x^2+x^3 \end{aligned}$$
   - Pour $n = 2$

     $$\begin{aligned} P_2 &= \prod_{k=0}^{2}\left(1+x^{2^k}\right) \\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2}) \\ &= P_1(x)(1+x^4) \\ &= (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) \\ &= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 \end{aligned}$$

   Ces premiers calculs nous servent à former une conjecture, que l'on va démontrer par récurrence.

   Montrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} x^i$.

   - Initialisation : pour $n = 0$
     La formule a été démontrée lors de la phase de conjecture.
   - Hérédité

     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} x^i$.

     $$\begin{aligned} P_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) \\ &= P_n(x)\left(1+x^{2^{n+1}}\right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} x^i\right)\left(1+x^{2^{n+1}}\right) \\ &= \left(1+x+\cdots+x^{2^{n+1}-1}\right)\left(1+x^{2^{n+1}}\right) \\ &= 1+x+\cdots+x^{2^{n+1}-1}+x^{2^{n+1}}+\cdots+x^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} \\ &= 1+x+\cdots+x^{2^{n+2}-1} \\ &= \sum_{i=0}^{2^{n+2}-1} x^i \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} x^i\ .}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} Q_n(x) &= (1-x)P_n(x) \\ &= P_n(x) - xP_n(x) \\ &= 1 + x + \cdots + x^{2^{n+1}-1} - \left(x + x^2 + \cdots + x^{2^{n+1}}\right) \\ &= 1 - x^{2^{n+1}} \end{aligned}$$
   $$\boxed{Q_n : x \mapsto 1 - x^{2^{n+1}}}$$

   Remarque
   Le résultat de la question 2 revient à dire qu'on aimerait pouvoir calculer $P_n(x)$ de la façon suivante, en reconnaissant une somme géométrique :
   $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} x^i = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}$$
   On ne le fait cependant pas, parce que quand on étudie des polynômes réels on n'écrit pas de division entre des polynômes.

Exercice 3 (Recherche du degré détaillée ; résolution dans les grandes lignes)

L'idée générale est la même que dans l'exercice 4.

La différence se trouve dans la phase de recherche du degré, pour deux raisons. Tout d'abord, le fait que P'' soit présent dans l'équation force à distinguer des cas (polynôme nul, polynômes de degré 0 ou 1, polynômes de degré $d \geqslant 2$). De plus, dans le cas $d \geqslant 2$, l'analyse du degré doit être faites de façon plus fine.

1. Degré

   - Polynôme nul
     Le polynôme nul est solution de l'équation.
   - Polynôme de degré 0 ou 1
     Soit P un polynôme de degré 0 ou 1 ; ainsi, $P'' = 0$.
     Ainsi : P est solution de $(E) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$.
     Or, ceci est faux.
     Donc aucune polynôme de degré 0 ou 1 n'est solution de (E).
   - Polynôme de degré d, $d \geqslant 2$
     Soit P un polynôme de degré d, $d \geqslant 2$.
     Une analyse de degré similaire à celle de l'exercice 4 n'aboutit à rien.
     On écrit alors $P : x \mapsto a_d x^d + R(x)$ où $a_d \neq 0$ et R est un polynôme de degré au maximum $d-1$.
     On reporte dans (E) :

     $$\begin{aligned} & P \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+x+1)\Big(d(d-1)a_d x^{d-2} + R''(x)\Big) - 12\Big(a_d x^d + R(x)\Big) = 0 \\ \Rightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(d(d-1) - 12\Big)a_d x^d + Q(x) = 0 \end{aligned}$$

     où Q est un polynôme réel de degré au maximum $d-1$.
     Ainsi, en identifiant seulement les coefficients des monômes de degré d, on obtient : $\Big(d(d-1)-12\Big)a_d = 0$.
     Or, $a_d \neq 0$ donc $d(d-1) - 12 = 0$, ce qui donne $d = -3$ (qui est impossible) ou $d = 4$.

2. Résolution
   On note $P : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où a, b, c, d, e sont des réels et $a \neq 0$.
   P est solution de (E)

   $$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+x+1)P''(x) - 12P(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \ldots \\ \Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 12a & - & 6b & & & & & & & = & 0 \\ 12a & + & 6b & - & 10c & & & & & = & 0 \\ & & 6b & + & 2c & - & 12d & & & = & 0 \\ & & & & 2c & & & - & 12e & = & 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 2a \\ c & = & \dfrac{12}{5}a \\ d & = & \dfrac{7}{5}a \\ e & = & \dfrac{2}{5}a \end{array}\right. \end{aligned}$$

3. Conclusion
   Lors de la phase de résolution, on a trouve une famille de solution (E).
   Par ailleurs, le polynôme nul est aussi solution de (E) et il est de la même forme que les autres en prenant $a = 0$.
   L'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{ x \mapsto a\left(x^4 + 2x^3 + \dfrac{12}{5}x^2 + \dfrac{7}{5}x + \dfrac{2}{5}\right) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 4 (Correction complète)

- Recherche du degré

  → Tout d'abord, le polynôme nul est solution de cette équation.

  → Si P est un polynôme constant non nul solution de (E), alors en notant c la valeur de cette constante, on aurait : $\forall x \in \mathbb{R},\ c = c\,(x^2+1)$.
  Ceci est un impossible

  → Soit P un polynôme non constant solution de l'équation. On note $d \in \mathbb{N}^*$ son degré.

  $$\begin{array}{rl} & P \text{ est solution de } (E) \\ \Rightarrow & 2d = d+2 \\ \Leftrightarrow & d = 2 \end{array}$$

- Résolution

  Soit P un polynôme de degré 2.
  On note $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels à déterminer et $a \neq 0$.

  $$\begin{array}{rl} & P \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ ax^4 + bx^2 + c = (x^2+1)(ax^2+bx+c) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^2 + x + c \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} b & = & 0 \\ a+c & = & b \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & b = 0 \text{ et } a = -c \end{array}$$

  Dans cette résolution, a priori, $a \neq 0$.
  Cependant, pour $a = 0$ on retrouve le polynôme nul dont on avait vu précédemment qu'il est solution de (E)

- Conclusion

  L'ensemble des solutions de (E) est :

  $$\left\{ \begin{array}{ccccc} P & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & a\,(x^2-1) \end{array} \ ,\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 5 (Correction complète)

1. On procède par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 0$
     Puisque $n = 0$, on a bien $P(n) = P(0)$.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n) = P(0)$.
     On applique alors la propriété vérifiée par P pour $x = n$.
     Il vient : $P(n+1) = P(n)$ et donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, $P(n+1) = P(0)$.
   - Conclusion
     $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0).}$

2. On pose $Q : x \mapsto P(x) - P(0)$.

   Q est un polynôme réel.
   De plus, d'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$, c'est-à-dire n est racine de Q.
   Ainsi, Q a une infinité de racines.

   Par ailleurs, pour tout polynôme réel R :
   - Soit R est le polynôme nul, et il a alors une infinité de racines
   - Soit on peut noter $d \in \mathbb{N}$ le degré de R et d'après le cours R a au maximum d racines

   Ainsi, le seul polynôme avec une infinité de racines est le polynôme nul.

   On en déduit que Q est le polynôme nul.
   C'est-à-dire : $\boxed{P \text{ est constant}}$.

Exercice 6

Fait en classe.

Exercice 7

Fait en classe.

Exercice 8 (Correction complète)

On résout :

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ (n+1)\alpha + n\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha - n = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - nL_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = n \\ \beta = -(n+1) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P \text{ admet 1 comme racine au moins double si et seulement si } \alpha = n \text{ et } \beta = -(n+1).}$

Exercice 9 (Correction complète)

- Concernant Q
  Soit parce qu'on calcule Δ, soit parce qu'on reconnait le polynôme du TD sur les nombres complexes, exercice 13 : les racines de Q sont j et $\bar{j}$.

- Vérifions que j est une racine de P
  $P(j) = j^{3p+2} + j^{3q+1} + j^{3r}$

  Or :

  $$\begin{array}{rcl} j^{3p+2} & = & (j^3)^p \times j^2 \\ & = & 1^p \times j^2 \\ & = & j^2 \\ \\ j^{3q+1} & = & (j^3)^q \times j \\ & = & j \\ \\ j^{3r} & = & (j^3)^r \\ & = & 1 \end{array}$$

  Ainsi, $P(j) = j^2 + j + 1 = 0$

- Vérifions que $\bar{j}$ est une racine de P
  Tout d'abord, $\bar{j} = j^2$ et donc $\bar{j}^3 = (j^2)^3 = (j^3)^2 = 1^2 = 1$.
  Ensuite, $\bar{j}^2 + \bar{j} + 1 = j^4 + j^2 + 1 = j + j^2 + 1 = 0$

  Ainsi, $\bar{j}$ vérifie les deux mêmes propriétés de calcul que j donc on obtient de même $P(\bar{j}) = 0$.

- Conclusion
  On a trouvé deux racines de P : j et $\bar{j}$.
  Donc P se factorise par $(x - j)(x - \bar{j}) = 1 + x + x^2$.

  Remarque : on obtient le fait que $(x - j)(x - \bar{j}) = 1 + x + x^2$ sans faire aucun calcul.
  On utilise juste le fait qu'il s'agit de deux expressions de $Q(x)$; forme développée et forme factorisée.

  $\boxed{P \text{ se factorise par } Q.}$

Exercice 10 (Grandes lignes)

Absurde.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
En combinant ces deux informations, on apprend que $\dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$ et donc que $\alpha = 0$.
Or, 0 n'est pas une racine de P.

Exercice 11

Fait en classe.

Exercice 12 (Grandes lignes)

1. $T_2 : x \mapsto 2x^2 - 1$
   $T_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$
2. Comme suggéré, on procède par récurrence *double* sur n.
   - Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$
     Soit $x \in \mathbb{R}$.
     D'une part, $T_0\Big(\cos(x)\Big) = 1$
     D'autre part, $\cos(0\,x) = \cos(0) = 1$
     Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

     Soit $x \in \mathbb{R}$.
     D'une part, $T_1\Big(\cos(x)\Big) = \cos(x)$
     D'autre part, $\cos(1\,x) = \cos(x)$
     Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n\Big(\cos(x)\Big) = \cos(nx)$ et $T_{n+1}\Big(\cos(x)\Big) = \cos(\,(n+1)x\,)$.
     Soit $x \in \mathbb{R}$.
     $$\begin{aligned} T_{n+2}\Big(\cos(x)\Big) &= 2\Big(\cos(x)\Big)T_{n+1}\Big(\cos(x)\Big) - T_n\Big(\cos(x)\Big) \\ &= \dots \\ &= \cos(\,(n+2)x\,) \end{aligned}$$
3. A partir des premiers termes, on conjecture que le degré de T_n est n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
   On le démontre par récurrence double.
   - Initialisation : pour $n = 1$ et $n = 2$
     C'est bon.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\deg(T_n) = n$, $\deg(T_{n+1}) = n + 1$ et le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} et celui de T_{n+1} est 2^n.
     On écrit alors : $T_n : x \mapsto 2^{n-1}x^n + R_n(x)$ et $T_{n+1} : x \mapsto 2^n x + R_{n+1}(x)$ où R_n est un polynôme réel de degré au maximum $n - 2$ et R_{n+1} est un polynôme réel de degré au maximum n.
     Soit $x \in \mathbb{R}$.
     $T_{n+2}(x) = \dots$
4. Soit $y \in [-1, 1]$; on peut donc définir $x = \arccos(y)$ et dans cette écriture on a $x \in [0, \pi]$.
   De plus, cela revient à avoir $y = \cos(x)$.

   On résout :
   $$\begin{aligned} T_n(y) = 0 &\Leftrightarrow T_n(\,\cos(x)\,) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \end{aligned}$$

   Or, dans l'absolu,
   $\cos(nx) = 0 \;\Leftrightarrow\; nx = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2n} + k\,\dfrac{\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$
   Mais on cherche seulement $x \in [0, \pi]$.
   On résout donc (k désignant un entier) :
   $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2n} + k\,\dfrac{\pi}{n} \leqslant \pi \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{\pi}{2n} \leqslant k\,\dfrac{\pi}{n} \leqslant \pi - \dfrac{\pi}{2n} \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \dfrac{1}{2}$
   Et, k étant entier, ceci est équivalent à $0 \leqslant k \leqslant n - 1$

   Finalement : $T_n(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\,\dfrac{\pi}{n}\right)$.
5. T_n est de degré n, donc il a au plus n racines distinctes.
   A la question précédente, on a trouvé n racines à T_n, et on vérifie qu'elles sont bien distinctes.
   Les racines trouvées à la question précédentes sont donc toutes les racines de T_n.
   On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{T}_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \right) \right)$$

(*Ne pas oublier le coefficient dominant quand on factorise.*)

Exercice 13 (Grandes lignes)

1. $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.
   Et, pour trouver ceci, on ne distingue par selon le signe de Δ *et on ne calcule pas explicitement* α *et* β.
   *Il **FAUT** chercher l'astuce.*
2. (a) On s'aide de la question précédente et on décide de poser $\mathsf{P} : x \mapsto x^2 - 2x + 2$.
   On vérifie ensuite que ce polynôme convient.
   (b) On déterminer les racines de P.
   L'ensemble des solutions de (S) est $\left\{ (1 - i, 1 + i)\,, (1 + i, 1 - i) \right\}$.

Exercice 14 (Grandes lignes)

1. Le faire. Sachant que $\dfrac{\pi}{5}$ radians correspondent à 72 degrés, et on fait au mieux en l'absence de rapporteur.
2. On utilise la méthode de l'exercice 13.
   $\mathsf{S} + \mathsf{T} = \cdots = -1$ et $\mathsf{ST} = \cdots = -1$ (en calculant *habilement*).
   Donc $\mathsf{P} : x \mapsto x^2 + x - 1$ convient.
3. a et a^4 sont conjugués et de même pour a^2 et a^3.
4. (a) Avant tout : les racines de P sont $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Or, à cause du cercle trigonométrique, $\dfrac{\mathsf{S}}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ tandis que $\dfrac{\mathsf{T}}{2} = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) < 0$.
   On en déduit que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$
   (b) On en déduit aussi que $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4}$
   (c) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2 \times \dfrac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 1$
   D'où on déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{8}$