Limites et continuité

Limites

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$
2. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{x+1}$
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}$
4. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{2}{1-x^4}\right)$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$
2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x)}{1-e^x}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln(e^x-x)}{x^2+1}$

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\,x\ln(x)\,)}{x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\,(1-\cos(x)\,)}{3x^3+2x^4}$
4. $\lim_{x\to 0} \Big(\cos(x)\Big)^{1/x^2}$
5. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x(x+a)} - x$ avec $a \in]\,0\,,\,+\infty\,[$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

Exercice 4

1. Démontrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.
2. On définit f par :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

   (a) Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.
   (b) Etudier les éventuelles limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Tracer l'allure de la courbe de f.
3. On définit g par :

$$g\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

   (a) Démontrer que g admet une limite en 0 et déterminer cette limite.
   (b) Etudier les éventuelles limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Déterminer un équivalent simple de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (d) Tracer l'allure de la courbe de g.

Interprétation graphique

Exercice 5

On définit la fonction f par :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-x-5}{x-2} \end{array}$$

1. Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
2. Déterminer l'éventuelle limite de f en 2.
3. Etude au voisinage de $+\infty$.
   (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Démontrer qu'il existe un réel a que l'on déterminera tel que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$.
4. Etude au voisinage de $-\infty$.
   Reprendre la question 3 au voisinage de $-\infty$.
5. Tracer l'allure de la représentation graphique de f en faisant figurer les résultats des questions 2, 3 et 4.

Exercice 6

On définit la fonction f par :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+x+1} \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
   Bonus : répondre à cette question sans dériver.
3. Etude au voisinage de $+\infty$.
   (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Démontrer qu'il existe un réel a que l'on déterminera tel que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$.
4. Etude au voisinage de $-\infty$.
   Reprendre la question 3 au voisinage de $-\infty$.
5. Tracer l'allure de la représentation graphique de f en faisant figurer les résultats des questions 3 et 4.

Comparaisons asymptotiques

Exercice 7

Déterminer un équivalent simple de :

1. $\sqrt{x^2+x}-x$ en $+\infty$
2. $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+2}}$ en $+\infty$
3. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ en $+\infty$

Exercice 8

Déterminer un équivalent simple de :

1. $\ln(1+x^2-3x)-2\ln(x)$ en $+\infty$
2. $\ln(1+x+x^2)$ en 0
3. $\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x-1$ en $+\infty$
4. $\left(x^3+x\right)^{\frac{1}{3}}-x$ en $+\infty$

Exercice 9

Soit f une fonction telle qu'au voisinage de $+\infty$ on ait :

$$x^2+\frac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant x^2+x$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 10

Soit P un polynôme réel non nul.

1. Démontrer que, au voisinage de 0, P est équivalent à son monôme de plus petit degré.
2. Démontrer que, au voisinage de $+\infty$, P est équivalent à son monôme de plus haut degré.

Exercice 11

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^n$.

Montrer que $f(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(x^{n+1})$.

Exercice 12

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $x^\alpha=\underset{x\to0}{o}(x^\beta)$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $x^\alpha=\underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta)$.

Continuité

Exercice 13

On définit la fonction f par :

$$f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Exercice 14

On définit la fonction f par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

1. Justifier que f est correctement définie.
2. Etudier la continuité de f.

Prolongement par continuité

Exercice 15

Soit f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 16

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D, étudier la continuité de f sur D et déterminer si on peut prolonger f par continuité là où elle n'est pas définie.

1. $f : x \mapsto x\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
2. $f : x \mapsto e^{1/x}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

Théorèmes de continuité et théorème de la bijection

Exercice 17

Montrer qu'une application continue, périodique et définie sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 18

Démontrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 19

Soient $P : x \mapsto x^5-3x-2$ et $f : x \mapsto x2^x-1$ (où x désigne un réel).

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que P a au moins une racine dans $[1,2]$.
   (b) A l'aide de Python, déterminer une valeur approchée de cette racine.
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans $[0,1]$.
4. Montrer que l'équation $P(x)=f(x)$ a au moins une solution dans $]0,2[$.

Exercice 20

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue ($a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$).
Un *point fixe* de f est un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=c$.

1. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x)-x$, montrer que f admet au moins un point fixe.
2. Montrer que si f est de plus décroissante, alors le point fixe est unique.
3. (a) En déduire que l'équation $x+\sin(x)=1$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) A l'aide de Python, obtenir une valeur approchée de cette solution.

Exercice 21

On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$$

1. A l'aide de Python, afficher la courbe de f.
2. Déterminer le domaine de définition D de f.
3. Montrer que f est continue sur D.
4. Démontrer que f est une bijection de D sur un ensemble à préciser.
5. Montrer que f^{-1} est continue.
6. Déterminer une expression de f^{-1}.

Exercice 22

On définit la fonction *cosinus hyperbolique* pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

On définit la fonction *sinus hyperbolique* pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité de ces fonctions.
2. Soient x et y des réels. Simplifier :
   (a) $\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$
   (b) $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$
   (c) $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)$
3. Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

Suites définies implicitement

Exercice 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme réel P_n par :

$$P_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n admet une unique racine réelle que l'on notera u_n.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(u_n) > 0$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) converge vers 0.
   On pourra procéder par l'absurde pour déterminer la valeur de la limite.
5. Déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice 24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + 2x^2 + x - 1 \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in \left[0\,,\,\frac{1}{2}\right]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x_n) \leqslant 0$.
3. En déduire que (x_n) est croissante, puis qu'elle converge.
4. Calculer la limite de la suite $((x_n)^n)$ et en déduire celle de (x_n).

Bonus

Exercice 25

On définit la fonction f par :

$$f \;:\; x \;\mapsto\; \frac{\ln(1+|x|)}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Etudier les variations de f sur D.
3. f admet-elle une limite en 0 ?
4. Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Tracer l'allure de la représentation graphique de f. On fera figurer les éventuelles asymptotes.

Exercice 26

On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \sin(x) \end{array}$$

1. Etudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Donner (sans justifier) l'allure de la représentation graphique de f.

Exercice 27

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}$