Semaine 17 - Lundi 10 février au vendredi 14 février

Chap 17 - Polynômes réels

I/ Polynômes et règles de calcul

1. Polynômes
   - Définitions : monôme réel, polynôme réel, coefficients
   - Cas particuliers : polynôme constant, noté $P = a_0$ et polynôme nul, noté $P = 0$
   - Proposition : le seul polynôme constant égal à 0 est le polynôme dont tous les coefficients valent 0, c'est-à-dire le polynôme nul
2. Cas d'égalité
   - Proposition : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (principe d'identification)
3. Opérations sur les polynômes
   - Proposition : la somme de deux polynômes, le produit d'un polynôme par un réel, le produit de deux polynômes et la composée de deux polynômes sont des polynômes
   - Définition : puissances d'un polynôme
4. Degré
   - Définition : degré $\deg(P)$ d'un polynôme non nul, $\deg(0) = -\infty$, coefficient dominant, polynôme unitaire, coefficient constant
   - Proposition : $\deg(P + Q)$, $\deg(\lambda P)$ (si $\lambda \neq 0$ et si $\lambda = 0$), $\deg(PQ)$
   - Proposition : l'ensemble des polynômes réels est intègre
5. Polynôme dérivé
   - Définition : polynôme dérivé, dérivées successives
   - Proposition : si $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\deg(P') = \deg(P)-1$ et sinon $\deg(P') = -\infty$

II/ Racines d'un polynôme

1. Racine et factorisation
   - Définition : $\alpha \in \mathbb{R}$ est racine de P ssi $P(\alpha) = 0$
   - Lemme de Bernoulli
   - Caractérisation : α est racine de $P \Leftrightarrow$ il existe Q polynôme réel tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$
   - Proposition : tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle
2. Racines distinctes
   - Proposition : des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ distincts sont racines de $P \Leftrightarrow P$ est factorisable par $(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$
   - Proposition : un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ a au maximum d racines distinctes
   - Proposition : si un polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}$ a d racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, alors P s'écrit sous la forme $P : x \mapsto a_d(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_d)$ avec $a_d \in \mathbb{R}^*$
3. Racines multiples
   - Définitions : multiplicité d'une racine, racine simple, racine double, racine multiple
   - Proposition : α est racine multiple de $P \Leftrightarrow P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$

Chap 18 - Limites et continuité

I/ Limites

1. Convergence, divergence
   - Définitions : voisinage d'un point, limite en un point, limite à gauche, limite à droite
   - Proposition : une fonction admet une limite en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a et ces deux limites sont égales
   - Définitions : voisinage de $+\infty$, de $-\infty$, limite en $+\infty$, en $-\infty$
   - Proposition : la limite d'une fonction, si elle existe, est unique
2. Limites et opérations
   - Propositions : limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse
   - Propositions : limite de $(f(u_n))$ et de $g \circ f$
3. Limites et inégalités
   - Proposition : signe d'une fonction de limite non nulle
   - Proposition : passage à la limite dans une inégalité large
   - Théorème de la limite finie par encadrement (dit théorème des gendarmes)
   - Théorème de comparaison (pour les limites infinies)
4. Limites et monotonie
   - Théorème de la limite monotone

II/ Comparaisons asymptotiques

1. Croissances comparées
    - Définition : fonction négligeable devant une autre au voisinage de a, notation $f(x) = \underset{x\to a}{o}\Big(g(x)\Big)$
    - Proposition : croissances comparées de $(\ln x)^\beta$ ($\beta > 0$), x^α ($\alpha > 0$) et a^x ($a > 1$)
2. Fonctions équivalentes
    - Définition : fonctions équivalentes au voisinage de a, notation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$
    - Propriétés des équivalents : symétrie, réflexivité, transitivité et lien avec les limites
    - Opérations sur les équivalents : multiplication, quotient, élévation à une puissance fixée
    - Equivalents usuels : au voisinage de $+\infty$, un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré et au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son monôme de plus petit degré
    - Equivalents usuels : équivalents en 0 de e^x-1, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha-1$, $\sqrt{1+x}-1$, $\dfrac{1}{1+x}-1$, $\sin(x)$, $\cos(x)-1$ et $\tan(x)$

Informatique

Tout ce qui a été vu reste au programme.

Questions de cours

1. *Avec preuve.*
   L'ensemble des polynômes réels est intègre.
2. *Avec preuve.*
   Enoncer *sans démontrer* le lemme de Bernoulli et en déduire *en démontrant* la caractérisation de "α est une racine de P".
3. *Sans preuve.*
   Enoncer les trois propositions concernant les racines distinctes.
4. *Sans preuve*
   Enoncer la proposition sur la composition des limites de deux fonctions ainsi que le théorème de la limite monotone (version détaillée).
5. *Sans preuve*
   Enoncer la proposition sur les équivalents usuels.