DS n°6 - Partie 2 - Correction

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On utilise la formule du binôme de Newton.
   $$\begin{aligned} P_n(x) &= (x+1)^n - (x-1)^n \\ &= x^n + nx^{n-1} + R_n(x) - \Big(x^n - nx^{n-1} + Q_n(x)\Big) \quad \text{(où } R_n \text{ et } Q_n \text{ sont des polynômes réels de degré strictement inférieur à } n-1) \\ &= 2nx^{n-1} + R_n(x) - Q_n(x) \end{aligned}$$
   Or, le degré de $R_n - Q_n$ est strictement inférieur à $n-1$, ce qui prouve que :
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ est de degré } n-1 \text{ et son coefficient dominant est } 2n.}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned} 0 \text{ est racine de } P_n &\Leftrightarrow P_n(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - (-1)^n = 0 \\ &\Leftrightarrow n \text{ est pair} \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^* : 0 \text{ est racine de } P_n \text{ si et seulement si } n \text{ est pair.}}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   L'ensemble de définition de P_n est $\mathbb{R}$; cet ensemble est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} P_n(-x) &= (-x+1)^n - (-x-1)^n \\ &= (-1)^n(x-1)^n - (-1)^n(x+1)^n \\ &= (-1)^{n+1}\Big((x+1)^n - (x-1)^n\Big) \\ &= (-1)^{n+1} P_n(x) \end{aligned}$$
   Or : $(-1)^{n+1} = 1$ si et seulement si n est impair et $(-1)^{n+1} = 1$ si et seulement si n est pair.
   On en déduit que :
   $$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} P_n \text{ est pair} & \Leftrightarrow n \text{ est impair} \\ P_n \text{ est impair} & \Leftrightarrow n \text{ est pair} \end{cases}.}$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On suppose que P_n admet une racine multiple α ; on a ainsi $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$.
   On traduit :
   $$\begin{cases} P_n(\alpha) = 0 \\ P_n'(\alpha) = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+1)^n - (\alpha-1)^n = 0 \\ n(\alpha+1)^{n-1} - n(\alpha-1)^{n-1} = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+1)^n = (\alpha-1)^n \\ (\alpha+1)^{n-1} = (\alpha-1)^{n-1} \end{cases}$$
   On injecte alors partiellement la deuxième ligne dans la première et on obtient :
   $$\begin{aligned} (\alpha+1)^n = (\alpha-1)^n &\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+1)^{n-1} = (\alpha-1)(\alpha-1)^{n-1} \\ &\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha-1)^{n-1} = (\alpha-1)(\alpha-1)^{n-1} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \text{ou} \\ \alpha+1 = \alpha-1 \end{cases} \end{aligned}$$
   D'une part, $P_n(1) = 1$ donc $\alpha = 1$ est impossible.
   D'autre part, $\alpha + 1 = \alpha - 1 \ \Leftrightarrow\ 1 = -1$ qui est impossible aussi.
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ n'a que des racines simples.}}$.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{D = \mathbb{R}^*}$.

2. La question revient à étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 1}$.

3. On commence par étudier le signe de f sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	$\|$	$+$
$e^x - 1$	$-$	$\|$	$+$
$f(x)$	$+$	$\|$	$+$

Ainsi, f est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, on a posé $f(0) = 1$.
Donc $\boxed{f \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}.}$

4. Par les théorèmes opératoires, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{1(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$.

On définit une fonction auxiliaire pour étudier le signe du numérateur.
On pose :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - 1 - xe^x \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$: $g'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$.
D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	0	$\searrow$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$

De plus, en 0 où l'étude ne peut pas se faire via la dérivée, la fonction f a été prolongée par continuité.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

5. Par croissance comparée : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

6. (a) Par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

   (b) Soit x au voisinage de $-\infty$; $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

   Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \text{ en posant } a = -1}$.

   (c) Soit x au voisinage de $-\infty$.

   $f(x) - ax = f(x) + x = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x + xe^x - x}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$.

   Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - ax = b \text{ en posant } b = 0}$.

(d) Soit x au voisinage de $-\infty$.

$f(x) - (ax + b) = f(x) + x = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$

Or, puisque x est au voisinage de $-\infty$, $e^x - 1 < 0$, $xe^x < 0$ et $f(x) - (ax + b) > 0$.

$\boxed{\text{Au voisinage de } -\infty,\ f(x) - (ax + b) \text{ est strictement positive.}}$

7. (a)
- Question 3

  $\boxed{C \text{ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.}}$
- Question 5

  $\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty,\ C \text{ admet la droite d'équation } y = 0 \text{ pour asymptote.}}$
- Question 6a

  $\boxed{\text{Au voisinage de } -\infty,\ C \text{ admet la droite d'équation } y = -x \text{ pour asymptote.}}$
- Question 6d

  $\boxed{\text{Au voisinage de } -\infty,\ C \text{ est strictement au-dessus de son asymptote.}}$

(b) En utilisant toutes les informations des questions précédentes, on obtient :