Exercice 4

1. On définit la fonction f par : pour tout $x \in]-1\,,\,+\infty[$, $f(x) = \ln(1+x) - x$.

   f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x \in]-1\,,\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

x	-1		0		$+\infty$
$-x$	‖	$+$	0	$-$	
$1+x$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   Ceci prouve que, pour tout $x \in]-1\,,\,+\infty[$, $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire : $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1\,,\,+\infty[\ ,\ \ln(1+x) \leqslant x}$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = \dfrac{1}{k}$.

   Tout d'abord : $1 \leqslant k$ donc $\dfrac{1}{k} \in]-1\,,\,+\infty[$ et on peut utiliser la question 1. On obtient :

   $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$ donc $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$ donc $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$

   $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}\ .}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

   D'où, par somme, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \leqslant v_n$

   En reconnaissant une somme télescopique, on obtient : $\ln(n+1) \leqslant v_n$

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \ln(n+1) \leqslant v_n\ .}$

   (c) Par comparaison, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

3. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On pose $x = -\dfrac{1}{k}$.

   Tout d'abord : $2 \leqslant k$ donc $\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{k}$ et $-\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{k}$: on peut utiliser la question 1. On obtient :

   $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) \leqslant -\dfrac{1}{k}$ donc $\ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) \leqslant -\dfrac{1}{k}$ donc $\ln(k-1)-\ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$ donc $\ln(k)-\ln(k-1) \geqslant \dfrac{1}{k}$

   $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ avec } k \geqslant 2\ ,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)\ .}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a : $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$

   D'où, par somme : $v_n \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k) - \ln(k-1)\Big)$

   En reconnaissant une somme télescopique, on obtient : $v_n \leqslant 1 + \ln(n)$

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*\ ,\ v_n \leqslant \ln(n) + 1\ .}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

   D'après les questions 2b et 3b, on obtient : $\ln(n+1) \leqslant v_n \leqslant \ln(n) + 1$

   D'où : $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{v_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$ (on peut diviser car $n \neq 1$)

   Or : $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

   Et : $1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

   Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\dfrac{v_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui se traduit par : $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

   .

4. (a)
   - <u>Monotonie de (a_n)</u>
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     $a_{n+1} - a_n = v_{n+1} - \ln(n+1) - v_n + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$
     Or, d'après la question 3a appliquée à $k = n+1$, on sait que : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$.
     Ceci se traduit par : $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante}}$.
   - <u>Monotonie de (b_n)</u>
     Soit $n \in \mathbb{N}$, n supérieur ou égal à 2.
     $b_{n+1} - b_n = v_n - \ln(n+1) - v_{n-1} + \ln(n) = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$
     Or, d'après la question 2a appliquée à $k = n$, on sait que : $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
     Ceci se traduit par : $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{(b_n) \text{ est croissante}}$.
   - <u>Différence</u>
     Soit $n \in \mathbb{N}$, n supérieur ou égal à 2.
     $a_n - b_n = v_n - \ln(n) - v_{n-1} + \ln(n) = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   Ces trois points prouvent que $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}}$.

   (b) Par le théorème des suites adjacentes, (a_n) et (b_n) convergent vers un même réel.
   En s'intéressant uniquement à la suite (a_n), cela se traduit par : $\boxed{\text{la suite } (v_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$.

Exercice 5

1. Tout d'abord, f est définie sur $D = \mathbb{R}^*$.
   Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur D. Soit $x \in D$.
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x}$
   On donne donc les variations de f dans un tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. • Initialisation : pour $n = 0$
   u_0 existe (donné par l'énoncé) et $u_0 = 1 \geqslant 1$
   • Hérédité : on suppose qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
   Dans ce cas, $u_n \neq 0$ donc u_n appartient à l'ensemble de définition de f donc u_{n+1} existe.
   De plus : $1 \leqslant u_n \Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n)$ car f est croissante sur $[1, +\infty[$.
   C'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+1}$ et donc $1 \leqslant u_{n+1}$.
   • Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } 1 \leqslant u_n\ .}$

3. On démontre par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   • Initialisation : pour $n = 0$
   $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ donc $u_0 \leqslant u_1$
   • Hérédité
   On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Dans ce cas, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ car f est croissante sur $[1, +\infty[$ et u_n et u_{n+1} appartiennent à cet intervalle.
   C'est-à-dire : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   C'est ce qu'on voulait.
   • Conclusion
   $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

4. Par le théorème de limite monotone, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ a une limite}}$.
   De plus, comme (u_n) est croissante, cette limite est soit un réel soit $+\infty$.
   On suppose que cette limite est un réel L. Dans ce cas, en passant à la limite dans la formule de récurrence qui définit (u_n), on obtient : $L = L + \dfrac{1}{L} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1}{L}$. Ceci est impossible, donc (u_n) ne peut pas converger.
   Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.