

Devoir Surveillé n°6 - Partie 2**Samedi 9 mars 2024 - Durée : 2h***L'usage de la calculatrice est interdit.**Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.**Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.**Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.***Exercice 1**Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme réel P_n par :

$$P_n : x \mapsto (x + 1)^n - (x - 1)^n$$

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que 0 soit racine de P_n .
3. Le polynôme P_n ($n \in \mathbb{N}^*$) est-il une fonction paire ? impaire ?
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n'admet que des racines simples.

Exercice 2On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

(où x désigne un réel)La courbe représentative de f sera notée C .

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité là où elle n'est pas définie.
On continuera de noter f la fonction ainsi prolongée.
3. Déterminer le signe de f sur \mathbb{R} .
4. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
6. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(b) Démontrer qu'il existe un réel a que l'on déterminera tel que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
(c) Démontrer qu'il existe un réel b que l'on déterminera tel que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = b$.
(d) Etudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ au voisinage de $-\infty$.
7. (a) Interpréter graphiquement les questions 3, 5, 6c et 6d.
(b) Tracer l'allure de C .