Limites et continuité

Exercice 1

Fait en classe.

Exercice 2 (Grandes lignes)

1. Forme indéterminée "0/0" .
   On utilise des équivalents : $\dfrac{e^{-x}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x}$
   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = -1}$

2. Ce n'est pas une forme indéterminée !
   $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = 0}$

3. Forme indéterminée "0/0" .
   On utiliser un équivalent, au dénominateur seulement.
   $\dfrac{x\ \ln(x)}{1-e^{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x\ \ln(x)}{-x}$
   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ \ln(x)}{1-e^{x}} = +\infty}$
   Et pas de limite en 0^-.

4. Forme indéterminée "∞/∞" .
   On commence par factoriser dans le ln pour pouvoir utiliser l'équivalent usuel.
   $\dfrac{x\ln(e^{x}-x)}{x^2+1} = \cdots = \dfrac{x\left(x+\ln(1-xe^{-x})\right)}{x^2+1}$
   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln(e^{x}-x)}{x^2+1} = 1}$

Exercice 3 (Grandes lignes)

1. Forme indéterminée "0/0" .
   On utilise les équivalents.
   On trouve $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin\Big(x\ln(x),\Big)}{x} = -\infty}$.

2. Forme indéterminée "0/0" .
   On utilise les équivalents.
   On trouve $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x\ln(x)} = 0}$.

3. Forme indéterminée "0/0" .
   On utilise les équivalents.
   $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-e^x)\,(1-\cos(x)\,)}{3x^3+2x^4} = -\dfrac{1}{6}}$

4. Forme indéterminée "1^∞" .
   On passe à la forme exponentielle, puis on utilise les équivalents.
   On passe vraisemblablement par une étape : $\Big(\cos(x)\Big)^{1/x^2} = \exp\Big(\dfrac{1}{x^2}\ln(1+\cos(x)-1)\Big)$
   $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \Big(\cos(x)\Big)^{1/x^2} = e^{-1/2}}$

5. Forme indéterminée "$+\infty-\infty$" .
   On factorise en faisant attention au fait que $\sqrt{x^2} = x$ *parce qu'on est au voisinage de* $+\infty$ puis on utilise un équivalent usuel.
   $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x(x+a)} - x = \dfrac{a}{2}}$

6. Forme indéterminée "0/0" .
   $\boxed{\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ n'a pas de limité en } 0}$
   Puisque $\sqrt{x^2} = |x|$, on trouve $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$

Exercice 4 (Très grandes lignes)

1. Raisonnement par l'absurde à partir de la proposition sur la composition fonction / suite.
2. (a) C'est une reformulation de la question 1.
   (b) On trouve 1.
   (c) Voir Geogebra.
3. (a) Théorème des gendarmes et on trouve 0.
   (b) On trouve $+\infty$.
   (c) x^2.
   (d) Voir Geogebra (et faire apparaître les deux paraboles utiles).

Exercice 5 (Correction complète)

1. Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur son ensemble de définition.
   Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$.
   $f'(x) \;=\; \dfrac{(2x-1)(x-2)-(X^2-x-5)x}{(x-2)^2} \;=\; \dfrac{x^2-4x+7}{(x-2)^2}$
   Pour le numérateur, $\Delta = 16 - 28 < 0$
   On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

2. - <u>En 2^-</u>
     $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - x - 5 = -3$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} x - 2 = 0^-$
     Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty}$
   - <u>En 2^+</u>
     $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - x - 5 = -3$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0^+$
     Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty}$
   - <u>En 2</u>
     $\boxed{f \text{ n'a pas de limite en } 2.}$

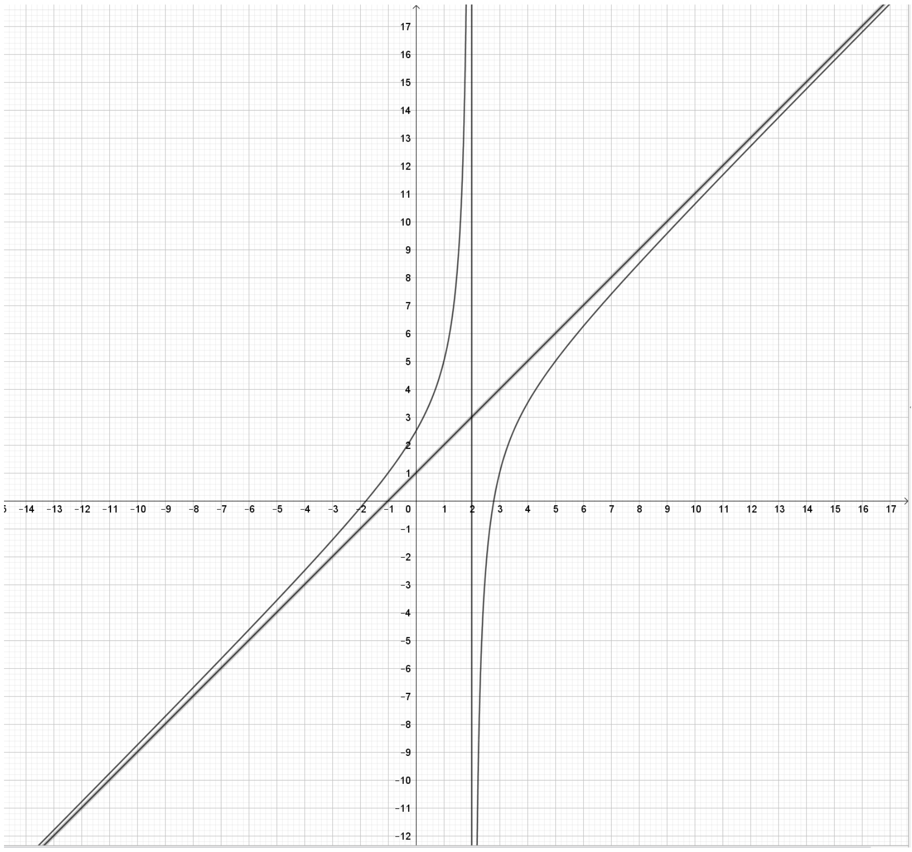
3. (a) $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.
   (b) Soit x au voisinage de $+\infty$.
   $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2-x-5}{x^2-2x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2}$ donc $\boxed{\text{pour } a = 1,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a}$
   (c) Soit x au voisinage de $+\infty$.
   $$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x^2-x-5}{x-2} - x \\ &= \frac{x^2-x-5-x^2+2x}{x-2} \\ &= \frac{x-5}{x-2} \end{aligned}$$
   Ainsi, en utilisant des équivalents, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = 1}$.

4. Les calculs sont exactement les mêmes et on obtient :
   (a) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$
   (b) $\boxed{\text{pour } a = 1,\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a}$
   (c) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - ax = 1}$

5. On interprète les résultats des questions 2, 3c et 4c :

   - <u>En 2</u>
     $\boxed{\text{La droite d'équation } x = 2 \text{ est asymptote à la courbe de } f.}$
   - <u>En $+\infty$</u>
     $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = 1 \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = 0$
     On en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x + 1 \text{ est asymptote à la courbe de } f \text{ au voisinage de } +\infty}$.
   - <u>En $-\infty$</u>
     $\lim_{x \to -\infty} f(x) - ax = 1 \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) - (x+1) = 0$
     On en déduit que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x + 1 \text{ est asymptote à la courbe de } f \text{ au voisinage de } -\infty}$.

   On trace d'abord les asymptotes et ensuite la courbe. On obtient :



Exercice 6 (Correction quasi complète)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $\sqrt{x^2+x+1}$ existe si et seulement si $x^2+x+1 \geqslant 0$
   Or, pour ce polynôme, $\Delta = -3 < 0$ et le coefficient dominant est positif. Ainsi, cette inégalité est vraie.
   Donc $\boxed{f \text{ est bien définie}}$.

2. On note $P : x \mapsto x^2+x+1$.
   Ce polynôme est strictement décroissant puis strictement croissant (coefficient dominant positif) et atteint son minimum en $\dfrac{-1}{2\times 1} = -\dfrac{1}{2}$.
   Par ailleurs, la fonction racine est strictement croissante. On obtient donc les variations de f par composition :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

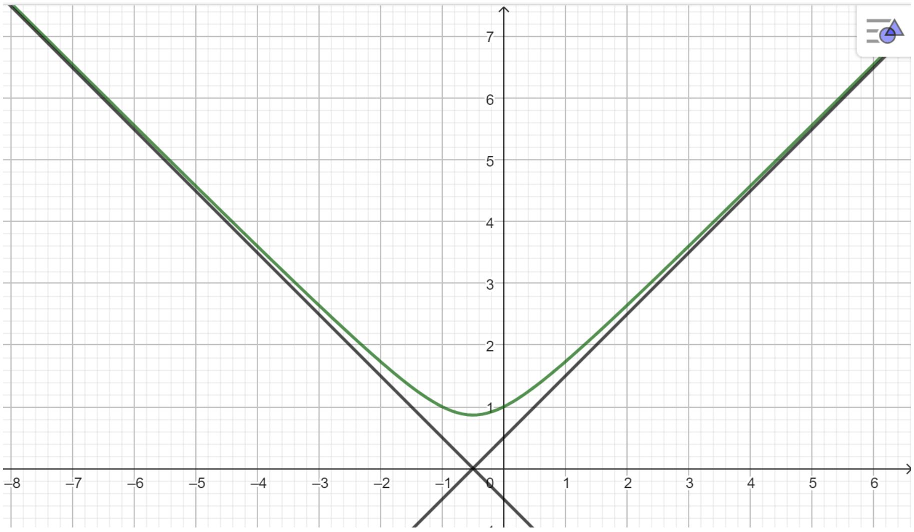
3. (a) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

   (b) Soit x au voisinage de $+\infty$.
   $$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}\\ &= \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}\\ &= \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} \qquad \text{(car } x \text{ est au voisinage de } +\infty \text{ donc positif)}\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Pour } a=1, \text{ on a bien } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a}$.

   (c) Soit x au voisinage de $+\infty$.
   $$\begin{aligned}f(x)-ax &= \sqrt{x^2+x+1}-x\\ &= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right) \qquad \text{(comme précédemment)}\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\end{aligned}$$
   $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = \frac{1}{2}}$

   (d) • Remarque 1. Ce n'est pas explicitement demandé, mais on transforme et on interprète :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-x-\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$$
   Ainsi, au voisinage de $+\infty$, la courbe de f et la droite d'équation $y = x+\dfrac{1}{2}$ "se ressemblent".
   Avec le bon vocabulaire : C admet la droite d'équation $y = x+\dfrac{1}{2}$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.
   • Remarque 2. Plus tard dans l'année, dans le chapitre "Développements limités", nous apprendrons en plus à savoir de façon efficace si C est au-dessus ou en dessous de cette droite.

4. Les calculs sont très similaires. Le seul point auquel il faut vraiment faire attention est :
   Au voisinage de $-\infty$, $|x| = -x$, ce qui a des conséquences sur les résultats.
   On trouve :
   $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) + x = -\frac{1}{2}}$$
   On interprète cette dernière limite par :
   C admet la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ pour asymptote au voisinage de $-\infty$.
5. On obtient :



Exercice 7 (Grandes lignes)

1. On transforme en : $x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-1\right)$ (possible car $x>0$)

   On trouve $\boxed{\sqrt{x^2+x}-x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}}$

2. On transforme : $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+2}} = \sqrt{\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}} = \sqrt{x}\,\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}$

   On trouve $\boxed{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}}$

3. On transforme (quantité conjuguée) en : $x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)$

   On trouve $\boxed{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x}$

Exercice 8

Fait en classe.

Exercice 9

Fait en classe.

Exercice 10

Remarque : cette exercice revient à démontrer une proposition qu'on a seulement expliquée dans le cours.

1. Soit P un polynôme non nul.

   On note $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

   On note m le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$.

   On a ainsi en fait : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k = a_m x^m + \cdots + a_n x^n$.

   Soit x au voisinage de 0, $x \neq 0$.

   $$\begin{aligned}\frac{P(x)}{a_m x^m} &= \frac{a_m x^m + \cdots + a_n x^n}{a_m x^m}\\ &= 1 + \frac{a_{m+1}}{a_m}\,x + \cdots + \frac{a_n}{a_m}\,x^{d-m}\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

   C'est ce qu'on voulait.

2. Soit P un polynôme non nul.

   On note $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

   On note d le plus grand entier tel que $a_d \neq 0$.

   On a ainsi en fait : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^k = a_0 + \cdots + a_d x^d$.

   Soit x au voisinage de $+\infty$.

   $$\begin{aligned}\frac{P(x)}{a_d x^d} &= \frac{a_0 + \cdots + a_d x^d}{a_d x^d}\\ &= \frac{a_0}{a_d}\,\frac{1}{x^d} + \cdots + \frac{a_{d-1}}{a_d}\,\frac{1}{x} + 1\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

   C'est ce qu'on voulait.

Exercice 11 (Correction complète)

Soit x au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{f(x)}{x^n} \times \frac{1}{x}$$

Or : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^n} = 1$

Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^n} \times \dfrac{1}{x} = 0$

Ceci prouve que : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{n+1})}$

Exercice 12 (Correction complète)

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   On transforme :

   $$\begin{aligned} & x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(x^\beta) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^\alpha}{x^\beta} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^{\alpha-\beta} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha - \beta > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha > \beta \end{aligned}$$

   $$\boxed{x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(x^\beta) \;\Leftrightarrow\; \alpha > \beta}$$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   On transforme :

   $$\begin{aligned} & x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^\alpha}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^{\alpha-\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha - \beta < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha < \beta \end{aligned}$$

   $$\boxed{x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \;\Leftrightarrow\; \alpha < \beta}$$

Exercice 13

Fait en classe.
La question revient à : justifier que le prolongement par continuité a été fait correctement.

Exercice 14 (Correction complète)

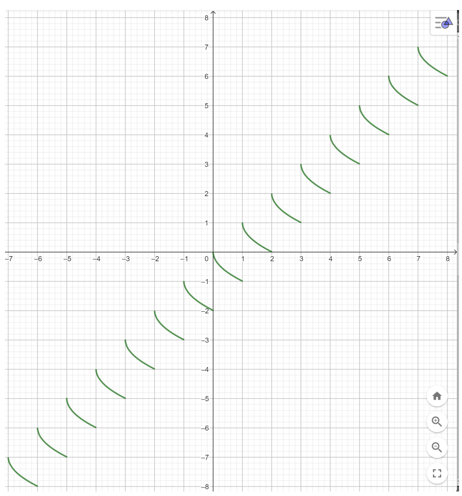
1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On sait que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ (définition de la partie entière)
   Donc $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$
   Donc $\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ existe.
   Donc $f(x)$ existe.
   $\boxed{\text{f est correctement définie.}}$
2. *Question difficile. Si elle était donnée ailleurs qu'en TD, elle viendrait avec une indication. Par exemple, on pourrait suggérer le changement de variable* $x = a \pm \epsilon$ *.*

   Soit $a \in \mathbb{R}$. On va étudier la continuité de f en a en distinguant les cas :
   - Si $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$
     Par les théorèmes opératoires, f est continue en a.
   - Si $a \in \mathbb{Z}$
     Soit $\epsilon \in \mathbb{R}$ avec $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$.

     D'une part :
     $$\begin{aligned} f(a-\epsilon) &= \lfloor a-\epsilon \rfloor - \sqrt{a-\epsilon-\lfloor a-\epsilon \rfloor} \\ &= a-1-\sqrt{a-\epsilon-(a-1)} \\ &= a-1-\sqrt{1-\epsilon} \end{aligned}$$
     Donc $f(a-\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} a-2$.
     C'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a-2$

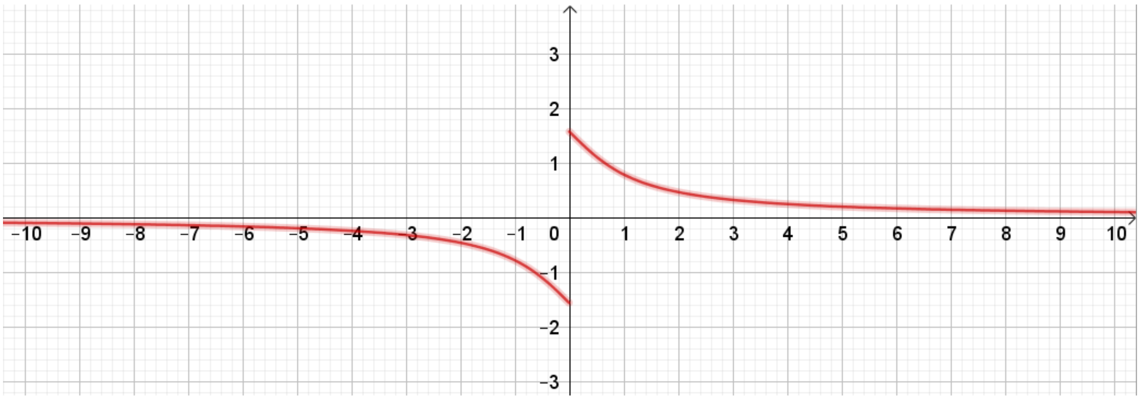
     D'autre part :
     $$\begin{aligned} f(a+\epsilon) &= \lfloor a+\epsilon \rfloor - \sqrt{a+\epsilon-\lfloor a+\epsilon \rfloor} \\ &= a-\sqrt{a+\epsilon-a} \\ &= a-\sqrt{\epsilon} \end{aligned}$$
     Donc $f(a-\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} a$.
     C'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a$

     Conclusion : les limites à gauche et à droite sont différentes donc f n'est pas continue en a
   - Conclusion
     $\boxed{\text{f n'est pas continue sur } \mathbb{R}.}$
3. Ce n'est pas demandé, mais on complète avec la représentation graphique :



Exercice 15 (Correction complète)

1. Par les théorèmes opératoires, $\boxed{\text{f est continue sur } \mathbb{R}^*}$.
2. D'une part :
   $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$
   D'autre part :
   $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc par composition, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$
3. Ce n'est pas demandé, mais on complète avec la représentation graphique :



Exercice 16

Fait en classe.

Exercice 17 (Correction complète)

Soit f une application continue, périodique et définie sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, on note $T > 0$ une période de f.
Ainsi, $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$.

Ensuite, comme f est continue sur l'intervalle fermée bornée $[0,T]$, le théorème des bornes atteintes s'applique et on sait qu'il existe m et M des réels tels que : $f([0,T]) = [m,M]$.

On obtient donc : $f(\mathbb{R}) = [m,M]$, ce qui prouve que f est bornée et atteint ses bornes.

$\boxed{\text{Toute fonction continue, périodique et définie sur } \mathbb{R} \text{ est bornée et atteint ses bornes.}}$

Exercice 18 (Correction complète)

Soit P un polynôme réel de degré impair.
P est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc $P(\mathbb{R})$ est un intervalle.
Or :

- Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ (coefficient dominant strictement positif)
- Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ (coefficient dominant strictement négatif)

  Ainsi, dans tous les cas, $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

  Ceci prouve que $0 \in P(\mathbb{R})$; 0 admet un antécédent réel par P.

  $\boxed{\text{Tout polynôme réel de degré impaire admet au moins une racine réelle.}}$

Exercice 19 (Correction presque complète)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ 2^x existe
   $\Leftrightarrow$ $\exp\Big(x\ln(2)\Big)$ existe

   Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

2. (a) • Brouillon

   On commence par réfléchir à "quels théorèmes sont applicables ici ?"

   → Théorème fondamental et TVI : oui

   → Théorème des bornes atteintes et théorème de la bijection : ça dépend si l'étude des variations est facile, et on ne saura pas tant qu'on n'aura pas essayé

   Par ailleurs, on demande "au moins" et pas "une et une seule".
   Donc le TVI fera l'affaire.

   • Rédaction au propre

   P est continue sur $[1, 2]$.
   De plus, $P(1) = -4 < 0$ et $P(2) = 24 > 0$.
   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 a au moins un antécédent par P dans $[1, 2]$.
   C'est-à-dire $\boxed{P \text{ a au moins une racine dans } [1, 2].}$

   (b) Avant de programmer une recherche par dichotomie, il faut savoir si P a une unique racine dans $[1, 2]$. On peut par exemple étudier les variations de P. On constate qu'une recherche par dichotomie est effectivement valable, et on la programme.

3. Par les théorèmes opératoires, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0, 1]$.
   De plus, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$.
   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 a au moins un antécédent par f dans $[0, 1]$.
   C'est-à-dire : $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ a au moins une solution dans } [0, 1]}$.

4. On pose $\varphi = P - f$ et on raisonne avec le TVI.

Exercice 20 (Correction complète)

1. On considère la fonction g :

   - La fonction g est définie sur l'intervalle $[a, b]$.
   - Comme f est continue sur $[a, b]$, par les théorèmes opératoires, g est aussi continue sur $[a, b]$.
   - $g(a) = f(a) - a$. Or, par hypothèse sur f, $f(a)$ est compris entre a et b, donc $a \leqslant f(a)$ donc $0 \leqslant g(a)$.
   - $g(b) = f(b) - b$. Or, par hypothèse sur f, $f(b)$ est compris entre a et b, donc $f(b) \leqslant b$ donc $g(b) \leqslant 0$.

   Ainsi, le théorèmes des valeurs intermédiaires s'applique et il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.
   Enfin, $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.
   Donc $\boxed{f \text{ a au moins un point fixe}}$.

2. Etudions la monotonie de g. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$.

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & -a \geqslant -x_1 > -x_2 \geqslant -b \\ \text{et} & f(a) \geqslant f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant f(b) \quad (f \text{ est décroissante sur } [a, b]) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad g(a) \geqslant g(x_1) > g(x_2) \geqslant g(b)$$

   Dans cette dernière ligne, on peut conserver l'inégalité stricte.
   Donc g est strictement décroissante sur $[a, b]$. En particulier, g est injective. Le point fixe trouvé à la question 1 est donc unique.
   $\boxed{\text{Si de plus } f \text{ est strictement décroissante, alors le point fixe est unique.}}$

3. (a) Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   $x + \sin(x) = 1 \Leftrightarrow -\sin(x) + 1 = x$.
   On définit donc la fonction f par :

$$f : \begin{array}{rcl} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sin(x) + 1 \end{array}$$

   Vérifions que f remplit les conditions du début de l'exercice.

   - Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ d'où $1 \geqslant f(x) \geqslant 0$.
     Ceci prouve que $f\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
     On peut donc prendre $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$.
   - Par les théorèmes opératoires, f est continue.
   - Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, sin est croissante, donc f est décroissante.

   Ainsi, les questions 1 et 2 s'appliquent et f a un unique point fixe. Ce qui prouve que :
   $\boxed{\text{L'équation } x + \sin(x) = 1 \text{ admet une unique solution dans } \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].}$

   (b) On pose $h : x \mapsto x + \sin(x) - 1$ et on recherche par dichotomie l'unique réel $c \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $h(c) = 0$.

```python
from math import *

def h(x):
    return x + sin(x)-1

def dichotomie(f,a,b,e):
    while (b-a) >=e:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <=0:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a,b)
```

   On trouve que : $\boxed{\text{cette solution vaut environ } 0,51097 \text{ (arrondi à } 10^{-5})}$.

Exercice 21

Fait en classe.

Exercice 22 (Grandes lignes)

1. On n'oublie pas de dire que les ensembles de définitions respectifs sont symétriques par rapport à 0.
   On trouve que ch est paire et sh est impaire.
2. A chaque fois, on remplace, on développe, on simplifie. On trouve :
   (a) $\mathsf{sh}(x+y)$
   (b) $\mathsf{ch}(x+y)$
   (c) 1

   Remarque : ch *est appelé le cosinus hyperbolique et* sh *est le sinus hyperbolique. Ces deux fonctions sont des fonctions usuelles, même si elles ne sont pas au programme de BCPST. Leurs noms viennent des formules de définition, qui rappellent les formules d'Euler. Par ailleurs, les formules de la question 2 rappellent les formules de trigonométrie habituelles.*
3. On vérifie que le théorème de la bijection s'applique, et c'est le cas. On constate au passage que $\mathsf{sh}' = \mathsf{ch}$, ce qui continue d'évoquer les fonctions trigonométriques habituelles.
   On trouve que sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23 (Indications ; questions 4 et 5 détaillées)

Sera fait en classe. On ne donne ici que des indications. Par ailleurs, l'exercice 24 ressemble beaucoup à celui-ci ; on pourra donc éventuellement y chercher l'inspiration.

1. On veut que 0 ait un unique antécédent par P_n. Comme on n'a pas d'intervalle de la forme $[a, b]$ où chercher, le plus simple est de rédiger la réponse avec le théorème de la bijection, et ça fonctionne très bien.
2. On calculer $P_n(0)$ et on utilise les variations de P_n.
   Par exemple, ça peut être utile de raisonner à partir du tableau de variations.
3. On calculer $P_{n+1}(u_n)$ en utilisant le fait que $P_n(u_n) = 0$ pour remplacer une partie de l'expression.
   Le signe de $P_{n+1}(u_n)$ devient alors facile à étudier.
   Pour la monotonie de (u_n), on utiliser la première partie de la question, le fait que $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et les variations de P_n.

4. D'après les question précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par exemple par 0).
   Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge. On note L sa limite réelle.
   On sait de plus, grâce à la minoration, que $L \geqslant 0$.

   On raisonne par l'absurde : on suppose que $L > 0$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(u_n) = 0$, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
   Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtiendrait :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^5 = L^5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^5 + nu_n - 1 = +\infty = 0$
   Ceci est absurde.

   On en déduit que $L = 0$ et donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $nu_n = 1 - u_n^5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.
   C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$.
   Ceci prouve que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$.

Exercice 24 (Correction complète)

1. ***Idée générale*** *: continuité et stricte monotonie.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Rédaction 1 - Avec le théorème des valeurs intermédiaires

     $\rightarrow$ Par les théorèmes opératoires, f_n est continue sur $[0,1]$.
     $\rightarrow$ $f_n(0) = -1$
     $\rightarrow$ $f_n(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

     Ainsi, 0 étant compris entre $f_n(0)$ et $f_n(\frac{1}{2})$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

     De plus, par les théorèmes opératoires, f_n est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$:
     $f_n'(x) = nx^{n-1} + 2x + 1 > 0$
     Donc f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.
     En particulier, f_n est injective sur cet intervalle, ce qui prouve l'unicité.
   - Rédaction 2 - Avec le théorème de la bijection

     $\rightarrow$ Par les théorèmes opératoires, f_n est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$.
     $\rightarrow$ Par les théorèmes opératoires, f_n est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$:
     $f_n'(x) = nx^{n-1} + 2x + 1 > 0$
     Donc f_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.

     Ainsi, f_n est continue strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc le théorème de la bijection s'applique et f_n est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur :
     $f\Big([0, \frac{1}{2}] \Big) = [\, f(0)\, ,\, f(\frac{1}{2})\,] = [-1, \left(\frac{1}{2}\right)^n]$.
     Comme $0 \in [-1, \left(\frac{1}{2}\right)^n]$, 0 admet donc un unique antécédent par f dans $[0, \frac{1}{2}]$.
   - Conclusion
     Quelle que soit la rédaction choisie, on en déduit que :
     $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un unique } x_n \in [0, \frac{1}{2}] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0 .}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Idée générale *:* $f_n(x_n) = 0$ *fournit une information exploitable dans des calculs.*
   D'une part : $f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1} + 2x_n^2 + x_n - 1$
   D'autre part, par définition de x_n : $f_n(x_n) = (x_n)^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_n^2 + x_n - 1 = -(x_n)^n$
   Et donc que : $f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1} - (x_n)^n = (x_n)^n\,(x_n - 1)$
   Or, $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$ donc on en déduit le signe de $f_{n+1}(x_n)$:
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \leqslant 0 .}$
3. ***Idée générale*** *: exploiter la définition de* x_{n+1} *et les variations de* f_{n+1}.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On sait que $f_{n+1}(x_n) \leqslant 0$ et que $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.
   Ainsi : $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1})$.
   Par ailleurs, $x_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$ et f_{n+1} est strictement croissante sur cet intervalle.
   Donc $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n \leqslant x_{n+1}$.
   Ceci prouve que $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$.

La suite (x_n) est croissante et majorée (par $\frac{1}{2}$).

Donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(x_n) \text{ converge}}$.

4. On note l la limite de (x_n) ; on sait que $l \in [0, \frac{1}{2}]$.

   D'une part :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant (x_n)^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   Donc, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (x_n)^n = 0}$.

   D'autre part :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 0$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n)^n + 2x_n^2 + x_n - 1 = 0$
   D'où, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$: $0 + 2l^2 + l - 1 = 0$

   En résolvant cette équation, on obtient $l = -1$ ou $l = \frac{1}{2}$.

   On exclut la première solution car $l \in [0, \frac{1}{2}]$.

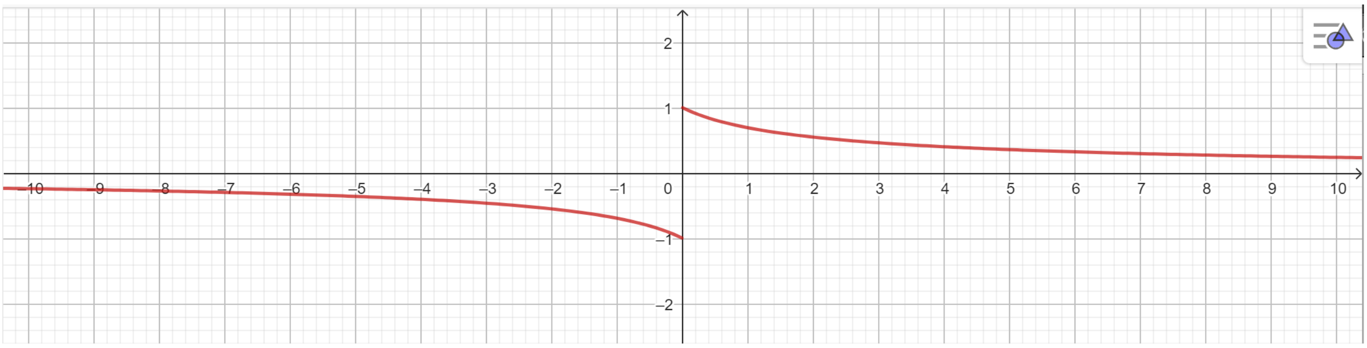
   Ainsi, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{2}}$.

Exercice 25 (Grandes lignes)

1. Rédaction habituelle, et on trouve $\boxed{D = \mathbb{R}^*}$.
2. - Sur $]0, +\infty[$
     Par les théorèmes opératoires, f est dérivable. Soit $x \in]0, +\infty[$.
     $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
     $$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$
     $f'(x)$ est du même signe que son numérateur.
     On pose $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$
     Par les théorèmes opératoires, g est dérivable. Soit $x \in]0, +\infty[$.
     $$g'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}$$
     D'où :

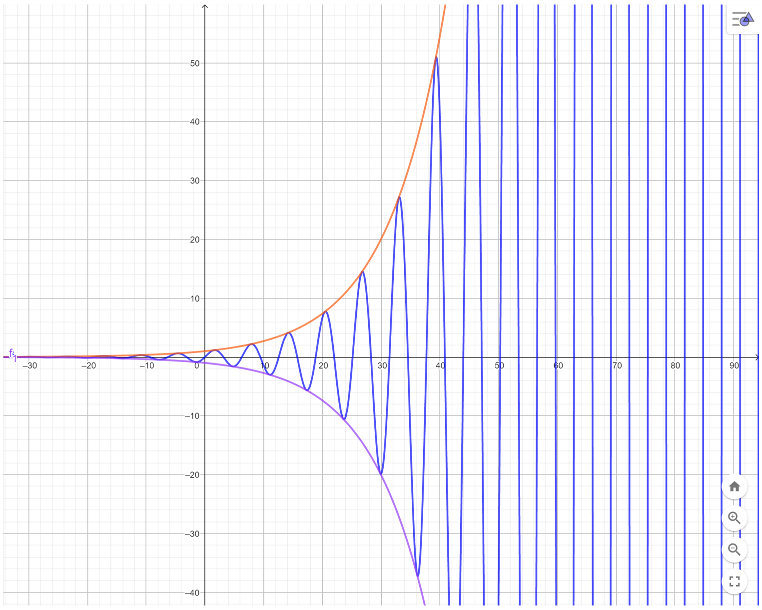
x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$
g	$\Vert$ 0	$\searrow$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$
f	$\Vert$	$\searrow$

   - Sur $]-\infty, 0[$
     f est impaire donc f est aussi strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$
3. A priori on a une forme indéterminée. On utilise un équivalent : $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{|x|}{x}$
   Ainsi, à droite la limite vaut 1 et à gauche la limite vaut -1.
   $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0.}$
4. Par croissance comparée, $\boxed{\text{ces deux limites valent } 0}$.
5. La seule asymptote est l'axe des abscisses (valable au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$)



Exercice 26 (Correction rapide)

1. En $-\infty$, la limite vaut 0 (théorème des gendarmes).
   En $+\infty$, pas de limite (même technique de preuve que dans l'exercice sur cos).
2. J'ai représenté $f : x \mapsto e^{x/10}\sin(x)$. L'allure est la même, et sinon on ne voyait rien.
   On a (comme dans l'exercice 4) la représentation visuelle de l'encadrement du théorème des gendarmes.



Exercice 27 (Correction rapide)

1. On transforme jusqu'à avoir $\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.
   Or, $1+x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ (puissance $\dfrac{1}{2}$).
   Finalement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) = 0}$
2. On utilise les équivalents usuels. On trouve $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = 2}$.
3. On passe à la forme exponentielle. Or, $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
   On peut donc utiliser des équivalents usuels.
   On trouve $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{x} = -\infty}$.
4. On factorise par $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$.
   On trouve : $\dots = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x+1}}-1\right)$.
   On utilise alors des équivalents usuels et on trouve : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} = 0}$
5. On pose $X = x - \dfrac{\pi}{3}$: ainsi, quand x tend vers $\dfrac{\pi}{3}$, X tend vers 0.
   On transforme l'expression via des formules trigonométriques.
   Au final, $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)} = -\sqrt{3}}$