Devoir Surveillé n°5

Samedi 8 février 2025 - Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

On souhaite déterminer un équivalent, quand $n \to +\infty$, de la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Pour cela, on introduit les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante et que (v_n) est croissante.
3. Justifier que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite réelle.
   Dans la suite de l'exercice, on notera L cette limite.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire un encadrement de S_n en fonction de L et n.
5. Déterminer la limite de la suite (S_n).
6. Déterminer un équivalent simple de S_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

où x désigne un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f converge en 1^+ et en -1^-.
4. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n^2}{u_n + 1} \end{cases}$$

en fonction du paramètre réel $a > 0$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x+1}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition D de f.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ (d'inconnue x réel) et étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   (c) Sur un même graphique restreint aux abscisses $x > -1$, représenter la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.
2. Dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{3}{5}$.
   (a) Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite (u_n) ?
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n < 1$.
   (c) La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, déterminer cette limite.
3. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.
   Démontrer que la suite (u_n) est constante.
4. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.
   (a) Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite (u_n) ?
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n > 1$.
   (c) La suite (u_n) admet-elle une limite ? Si oui, déterminer cette limite.

Exercice 4

Cet exercice propose d'étudier quelques propriétés des polynômes palindromes, c'est-à-dire dont les coefficients peuvent être indifféremment lus dans l'ordre croissant ou décroissant des degrés.

Ainsi, si on note $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, alors :

$$P \text{ est un polynôme palimdrome } \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, d]\!],\ a_k = a_{d-k}$$

Par exemple, le polynôme $x \mapsto 2x^6 - x^4 + 5x^3 - x^2 + 2$ est un polynôme palindrome.

1. Cas du degré 2

   Soit $P_2 : x \mapsto ax^2 + bx + a$ un polynôme palindrome de degré 2.
   On note r_1 et r_2 les deux racines de P_2 (non nécessairement distinctes).

   (a) Justifier que 0 n'est pas racine de P_2.

   (b) Calculer $r_1 r_2$.

   (c) Montrer que, si P_2 admet une racine double, alors cette racine vaut 1 ou -1.
   Quels polynômes palindromes correspondent à ce cas ? On les donnera sous forme développée.

   (d) Montrer que si P_2 n'admet pas de racine double, alors aucune de ses racines n'est égale à 1 ou à -1.

2. Cas du degré 3

   Soit $P_3 : x \mapsto ax^3 + bx^2 + bx + a$ un polynôme palindrome de degré 3.

   (a) Montrer qu'il existe Q un polynôme palindrome de degré 2 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = (x+1)Q(x)$.

   (b) En distinguant les cas selon les racines de Q, donner les racines de P_3 (avec multiplicités).

3. Cas général

   Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ un polynôme palindrome de degré $d \geqslant 0$ à coefficients réels.

   (a) Justifier que 0 n'est pas racine de P.

   (b) Montrer que, si d est impair, alors -1 est racine de P.

   (c) Montrer que, si $r \in \mathbb{R}$ est racine de P, alors $\frac{1}{r}$ aussi.

   (d) Montrer que, si $r \in \mathbb{R}$ est une racine de P de multiplicité au moins 2, alors $\frac{1}{r}$ aussi.