Semaine 18 - Lundi 3 mars au vendredi 7 mars

Chap 18 - Limites et continuité

I/ Limites

1. Convergence, divergence
   - Définitions : voisinage d'un point, limite en un point, limite à gauche, limite à droite
   - Proposition : une fonction admet une limite en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a et ces deux limites sont égales
   - Définitions : voisinage de $+\infty$, de $-\infty$, limite en $+\infty$, en $-\infty$
   - Proposition : la limite d'une fonction, si elle existe, est unique
2. Limites et opérations
   - Propositions : limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse
   - Propositions : limite de $(f(u_n))$ et de $g \circ f$
3. Limites et inégalités
   - Proposition : signe d'une fonction de limite non nulle
   - Proposition : passage à la limite dans une inégalité large
   - Théorème de la limite finie par encadrement (dit théorème des gendarmes)
   - Théorème de comparaison (pour les limites infinies)
4. Limites et monotonie
   - Théorème de la limite monotone

II/ Comparaisons asymptotiques

1. Croissances comparées
   - Définition : fonction négligeable devant une autre au voisinage de a, notation $f(x) \underset{x \to a}{=} o\Big(g(x)\Big)$
   - Proposition : croissances comparées de $(\ln x)^\beta$ $(\beta > 0)$, x^α $(\alpha > 0)$ et a^x $(a > 1)$
2. Fonctions équivalentes
   - Définition : fonctions équivalentes au voisinage de a, notation $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$
   - Propriétés des équivalents : symétrie, réflexivité, transitivité et lien avec les limites
   - Opérations sur les équivalents : multiplication, quotient, élévation à une puissance fixée
   - Equivalents usuels : au voisinage de $+\infty$, un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré et au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son monôme de plus petit degré
   - Equivalents usuels : équivalents en 0 de e^x-1, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha-1$, $\sqrt{1+x}-1$, $\dfrac{1}{1+x}-1$, $\sin(x)$, $\cos(x)-1$ et $\tan(x)$

III/ Continuité

1. Définitions
   - Définitions : continuité en a, à gauche, à droite, sur un intervalle, notation $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
   - Exemples : exponentielle, ln, les polynômes, sin, cos, tan, racine et valeur absolue sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs
2. Continuité et opérations
   - Proposition : continuité de $f+g$, λf, fg, $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$
   - Proposition : continuité de $g \circ f$
3. Prolongement par continuité
   - Proposition : prolongement par continuité
4. Théorèmes de continuité
   - Théorème fondamental : l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervelle
   - Théorème des valeurs intermédiaires
   - Théorème des bornes atteintes
5. Théorème de la bijection
   - Théorème de la bijection
   - Proposition : déterminer $f(I)$
   - Exemple fondamental : arctan (définition, variations, continuité, imparité, représentation graphique)

Informatique

Tout ce qui a été vu reste au programme.

Questions de cours

1. *Sans preuve.*
   Enoncer la proposition sur la composition des limites de deux fonctions ainsi que le théorème de la limite monotone (version détaillée).
2. *Sans preuve.*
   Enoncer la proposition sur les équivalents usuels.
3. *Sans preuve.*
   Enoncer le théorème sur l'image continue d'un intervalle et le théorème des valeurs intermédiaires.
4. *Sans preuve.*
   Enoncer le théorème de la bijection et la proposition sur la forme de $J = f(I)$.
5. *Avec preuve.*
   Etude de arctan : définition exacte, continuité, variations, représentation graphique.