

1 Analyse

Proposition 1 (*Trigonométrie : valeurs particulières*)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	0	N.D.	0

Proposition 2 (*Trigonométrie : formules des angles associés*)

- Théorème de Pythagore : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Formules des angles associés :

$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$	$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$	$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$	$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$	$\tan(\theta + 2\pi) = \tan \theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$	

Proposition 3 (*Trigonométrie : formules d'addition des arcs*)

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Proposition 4 (*Trigonométrie : formules de duplication*)

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Proposition 5 (*Trigonométrie : résolution d'équations*)

$$\begin{aligned} \cos x = \cos y &\Leftrightarrow x = y [2\pi] \text{ ou } x = -y [2\pi] \\ \sin x = \sin y &\Leftrightarrow x = y [2\pi] \text{ ou } x = \pi - y [2\pi] \\ \tan x = \tan y &\Leftrightarrow x = y [\pi] \end{aligned}$$

Théorème 1 (*Expression explicite d'une suite arithmétique*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\forall p \geq 0, \forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p)r.$$

Théorème 2 (*Expression explicite d'une suite géométrique*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\forall p \geq 0, \forall n \geq p, u_n = u_p q^{n-p}.$$

Théorème 3 (*Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique* ♡)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

$$\forall p \geq 0, \forall n \geq p, \sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} (n - p + 1)u_p & \text{si } q = 1 \\ u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Théorème 4 (Expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Soit $(E_C) : q^2 = aq + b$ son équation caractéristique associée et soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, (E_C) admet deux racines réelles distinctes q_1 ou q_2 .
Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.
- Si $\Delta = 0$, (E_C) admet une racine double réelle q_0 .
Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) q_0^n$.
- Si $\Delta < 0$, (E_C) admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.
Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.

Proposition 6 (Suites extraites de rangs pairs et impairs)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell. \end{cases}$$

Proposition 7 (Passage à la limite)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$, $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles convergentes.
Si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Théorème 5 (Théorème d'encadrement dit "des gendarmes")

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si :

- les suites u et w convergent vers la même limite réelle ℓ
- et pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

alors la suite v converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$.

Théorème 6 (Théorème de comparaison de limites)

Soient (u_n) , (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 7 (Théorème de la limite monotone (pour les suites))

Toute suite monotone admet une limite (finie ou infinie). En particulier :

- toute suite croissante majorée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$;
- toute suite décroissante minorée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 8 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ convergent vers une seule et même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors on a :

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Proposition 8 (Équivalent d'une suite convergente vers un réel non nul)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle et soit ℓ un réel **non nul**. Alors :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone (pour les fonctions réelles))

Toute fonction monotone f sur un intervalle $I = [a, b[$ admet une limite en b .

- Si f est croissante et majorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe et est finie.
- Si f est croissante non majorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
- Si f est décroissante et minorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe et est finie.
- Si f est décroissante non minorée sur I , alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.

Théorème 10 (Théorème d'encadrement)

Soient f , g et h trois fonctions définies en un voisinage V d'un point a et vérifiant :

$$\forall x \in V, f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h admettent une limite finie ℓ en a , alors g admet aussi le réel ℓ pour limite en a .

Théorème 11 (Théorème de comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies en un voisinage V d'un point a et vérifiant :

$$\forall x \in V, f(x) \leq g(x).$$

(i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

(ii) Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème 12 (Passage d'une inégalité à la limite)

Soient f et g deux fonctions admettant une limite (finie ou non) en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. S'il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Théorème 13 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) une valeur $c \in [a, b]$ telle que $y = f(c)$.

Proposition 9 (L'image d'un intervalle par une fonction continue)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 14 (Image d'un segment par une fonction continue)

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 15 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I . Alors :

- f réalise une bijection entre l'intervalle I et l'intervalle $f(I)$;
- f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f .

Théorème 16

Deux fonctions sont équivalentes si, et seulement si, leur différence est négligeable devant l'une d'elles :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)).$$

Théorème 17 (Dérivation d'une application réciproque)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone sur un intervalle I . Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)} \text{ i.e. } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Théorème 18 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 19 (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Proposition 10

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Si f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement monotone sur I .

Proposition 11 (Croissances comparées de suites)

Soient α et β deux réels strictement positifs et soit $q > 1$.

$$(\ln n)^\alpha = o_{n \rightarrow +\infty}(n^\beta), \quad n^\beta = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n), \quad q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!),$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{q^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$$

Proposition 12 (Croissances comparées de fonctions)

Soient α et β deux réels strictement positifs.

$$(\ln x)^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x), \quad |\ln x|^\alpha = o_{x \rightarrow 0}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

Proposition 13 (Développements limités usuels)

- (i) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- (ii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$
- (iii) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$
- (iv) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- (v) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- (vi) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- (vii) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

Proposition 14 (Approximation affine)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si alors elle admet un **développement limité à l'ordre 1** de la forme :

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0) \quad \text{ou encore} \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell h + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

Dans ce cas, $\ell = f'(x_0)$.

Proposition 15 (Unicité du développement limité)

Si f admet un développement limité en a à l'ordre n , alors celui-ci est unique (au point a et à l'ordre n).

Théorème 20 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o_{x \rightarrow a}((x - a)^n).$$

Proposition 16 (Intégration terme-à-terme d'un développement limité)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I (contenant 0), admettant un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Soit F une primitive de f sur I . Alors F admet pour DL à l'ordre $n + 1$ en 0 :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}).$$

Proposition 17 (Dérivées et primitives usuelles)

Chacune des fonctions f ci-dessous est dérivable sur l'intervalle I , de dérivée f' .

f	I	f'
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)	\mathbb{R} si $n \geq 0$ \mathbb{R}^{+*} ou \mathbb{R}^{-*} si $n < 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)	\mathbb{R}^{+*}	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln x$	\mathbb{R}^{+*}	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	\mathbb{R}	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto a^x$ ($a > 0$)	\mathbb{R}	$x \mapsto (\ln a)a^x$
$x \mapsto \sin x$	\mathbb{R}	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$\left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$x \mapsto \arctan x$	\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$

Proposition 18 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Proposition 19 (Relation de Chasles)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\forall c \in [a, b], \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Proposition 20 (Positivité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

Proposition 21 (Croissance de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Proposition 22 (Inégalité triangulaire)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Proposition 23 (Stricte positivité de l'intégrale)

L'intégrale d'une fonction positive et non identiquement nulle sur un segment non réduit à un singleton est strictement positive.

Théorème 21 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Théorème 22 (Intégration par parties sur un segment)

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Théorème 23 (Formule du changement de variable)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle J de \mathbb{R} . On suppose que $\varphi(J) \subset I$. Soient $(a, b) \in J^2$. On a alors :

$$\int_a^b \varphi'(t) \times f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Théorème 24 (Sommes de Riemann - méthode des rectangles)

Pour toute fonction f continue sur le segment $[a, b]$ (où $a < b$), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

Théorème 25 (Ensemble des solutions de $y' + ay = 0$)

Soit $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive d'une fonction a continue sur l'intervalle I . L'ensemble des solutions de (H) $y' = ay$ est :

$$\left\{ \begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{K} \end{aligned} \right\}.$$

Théorème 26 (Structure des solutions de $y' + ay = b$)

Soient a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} .
 Soit $f_0 : I \rightarrow \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$.
 Une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle homogène associée $(H) : y' + ay = 0$.

Théorème 27 (Solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ ($a \neq 0$))

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $(E_C) : ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle homogène $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E_C) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (E_C) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \mu e^{\alpha x} \sin(\beta x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E_C) admet une solution double réelle γ et l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{\gamma x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}.$$

Théorème 28 (Théorème de superposition - équa diff linéaire du premier ordre)

Soient a, f_1 et f_2 des fonctions continues sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 Si deux fonctions y_1 et y_2 sont respectivement des solutions des équations différentielles $y' + ay = f_1$ et $y' + ay = f_2$, alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Théorème 29 (Théorème de superposition - équa diff linéaire du second ordre)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, f_1 et f_2 des fonctions continues sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 Si deux fonctions y_1 et y_2 sont respectivement des solutions des équations différentielles $ay'' + by' + cy = f_1$ et $ay'' + by' + cy = f_2$, alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Théorème 30 (Dérivation d'une composée (fonction de deux variables))

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe \mathcal{C}^1 sur U .
 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soient $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I telles que, pour tout réel $t \in I$, $(u(t), v(t)) \in U$.

Alors, la fonction réelle

$$\begin{array}{l} \phi : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(u(t), v(t)) \end{array}$$

est définie et dérivable sur I . De plus, pour tout réel $t \in I$, on a :

$$\phi'(t) = u'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)).$$

Théorème 31 (Théorème de Schwarz)

Soit f une fonction de deux variables de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Alors :

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

2 Algèbre et géométrie

Théorème 32 (Composée d'injections, de surjections, de bijections)

Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- (i) Si f et g sont deux injections, alors $g \circ f$ est une injection.
- (ii) Si f et g sont deux surjections, alors $g \circ f$ est une surjection.
- (iii) Si f et g sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Théorème 33 (Formule du binôme dans le cas de deux matrices commutatives)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Proposition 24 (Inversibilité d'une matrice triangulaire)

Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est inversible si, et seulement si, aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul.

Proposition 25 (Involution et linéarité de la transposition)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. Alors :

$$(A^T)^T = A, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (A + B)^T = A^T + B^T.$$

Proposition 26 (Transposée d'un produit matriciel)

Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Proposition 27 (Transposition et inversibilité)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^T \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proposition 28 (Inversibilité d'un produit)

Soit $(A, B) \in (\text{GL}_n(\mathbb{K}))^2$. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 29 (Inverse et puissances de matrice)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible, d'inverse $(A^{-1})^k$.

Proposition 30 (Inversibilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

Une matrice de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son déterminant $ad - bc$ est non nul. Dans ce cas, son inverse est donné par :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Proposition 31 (Matrice de la composée d'applications linéaires)

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et \mathcal{B}_3 des bases respectives de trois espaces vectoriels E, F et G . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_1}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}(u).$$

Théorème 34 (Caractérisation matricielle d'un isomorphisme)

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases respectives des deux E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$ est inversible. Dans ce cas, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u))^{-1}$$

Proposition 32 (Degré de la somme de polynômes)

Pour tous polynômes P et Q , $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$. De plus, il y a égalité si $\deg P \neq \deg Q$.

Théorème 35 (Caractérisation d'une racine)

Un scalaire a est racine d'un polynôme P si, et seulement si, $(x \mapsto x - a)$ divise P .

Proposition 33 (Généralisation à plusieurs racines distinctes)

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires **deux-à-deux distincts**.

Les scalaires a_1, \dots, a_n sont des racines d'un polynôme P si, et seulement si, le polynôme $x \mapsto (x - a_1) \dots (x - a_n)$ divise P .

Proposition 34 (Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine)

Un scalaire $a \in \mathbb{K}$ est une racine multiple d'un polynôme P si, et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

3 Probabilités et statistiques

Proposition 35 (Coefficients binomiaux)

- (i) Symétrie : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- (ii) Formule du triangle de Pascal : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- (iii) Formule du "pion" : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Proposition 36 (Dénombrement)

Soit E un ensemble fini à n éléments. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- (i) Il y a $n!$ permutations de E .
- (ii) Il y a $\binom{n}{p}$ sous-ensembles à p éléments de E .
- (iii) Il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ p -uplets sans répétition de E .

Théorème 36 (Formule de Poincaré ou du crible)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Théorème 37 (Loi de probabilité sachant un événement)

Soit A un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A : \mathcal{T} &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}_A(B) \end{aligned}$$

est une loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) , appelée **loi de probabilité sachant A** .

Théorème 38 (Formule des probabilités composées)

Soient (A_1, \dots, A_n) une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème 39 (Formule des probabilités totales)

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements. Pour tout événement B , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap B).$$

Théorème 40 (Formule de Bayes)

Soient (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements et soit B un événement. Si tous les événements B, A_1, \dots, A_n ont une probabilité non nulle, alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

Théorème 41 (Caractérisation d'une variable par sa fonction de répartition)

Deux variables aléatoires réelles ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

Proposition 37 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie)

Soit X une variable aléatoire finie.

On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_k sont rangés dans l'ordre strictement croissant.

- (i) Pour tout $t < x_1, F_X(t) = 0$,
- (ii) pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}[$, on a :

$$F_X(t) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X = x_i).$$

- (iii) pour tout $t \geq x_n, F_X(t) = 1$.

Définition 1 (Espérance)

Soient X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On dit que X admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Proposition 38 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur Ω et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

Proposition 39 (Positivité et croissance de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur Ω . On a alors :

- Si X est positive, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Si de plus, $\mathbb{E}(X) = 0$ alors $X = 0$.
- Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Théorème 42 (Théorème du transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur un univers Ω et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.
Alors $f(X)$ est une variable aléatoire admettant une espérance égale à :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x).$$

Définition 2 (Variance)

Soient X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On dit que X admet une variance donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Théorème 43 (Formule de König-Huygens)

Toute variable aléatoire finie X admet une espérance, un moment d'ordre 2 et une variance, liées par la formule suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 40 (Caractérisation des variables constantes)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini.
La variance de X est nulle si, et seulement si, X est constante.

Proposition 41 (Quadraticité et invariance par translation de la variance)

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω .
Pour tous réels a et b , $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$

Proposition 42 (Propriétés de deux variables aléatoires indépendantes)

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies indépendantes, alors :

- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$,
- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

Théorème 44 (Lemme des coalitions)

Soient X_1, \dots, X_{n+p} des variables aléatoires finies mutuellement indépendantes.

- Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur $X_1(\Omega), X_2(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$. Les variables aléatoires $\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2), \dots, \varphi_n(X_n)$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles respectivement définies sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ et $X_{n+1}(\Omega) \times \dots \times X_{n+p}(\Omega)$.
Alors les variables $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Loi uniforme sur $[[a, b]]$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$
Univers-image	$X(\Omega) = [[a, b]]$
Loi de probabilité	$\forall k \in [[a, b]], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}$

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
Univers-image	$X(\Omega) = \{0; 1\}$
Loi de probabilité	$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = p \\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = p$
Variance	$\mathbb{V}(X) = p(1 - p) = pq$

Loi de binomiale de paramètres n et p	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
Univers-image	$X(\Omega) = [[0, n]]$
Loi de probabilité	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = np$
Variance	$\mathbb{V}(X) = np(1 - p) = npq$

Théorème 45 (Somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre)

Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p , alors la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Proposition 43 (Statistiques - Covariance et coefficient de corrélation linéaire)

Soit $S = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ une série statistique bivariable. On note \bar{x} et s_x^2 (resp. \bar{y} et s_y) la moyenne et la variance de la série x (resp. y), ainsi que $s_{x,y}$ et $r_{x,y}$ la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de la série double S .

- $s_{xy} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) = \bar{xy} - \bar{x}\bar{y}$.
- $|s_{xy}| \leq s_x s_y$ (donc $|r_{xy}| \leq 1$) et $s_{x+y}^2 = s_x^2 + 2s_{xy} + s_y^2$.

Théorème 46 (Ajustement affine selon la méthode des moindres carrés)

Soit $S = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in (\mathbb{R}^2)^n$ une série statistique bivariable. Parmi toutes les droites du plan d'équation $y = ax + b$, il en existe une seule et unique qui minimise la somme :

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette droite, appelée la **droite d'ajustement affine selon la méthode des moindres carrés** a pour équation $y = ax + b$ où $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$, et passe par le point milieu (\bar{x}, \bar{y}) du nuage de points.