DS n°4 - Partie 2 - Maths - Correction

Exercice 1

1. Pour construire une grille, il suffit de choisir les emplacements des cases noires.
   Les cases noires ne sont pas distinguables ; il faut les choisir simultanément.
   Et il y a $6 \times 7 = 42$ cases en tout.
   Il y a $\binom{42}{10}$ telles grilles différentes.

2. (a) C'est le même raisonnement que dans la question précédente, mais en excluant les 4 coins de l'ensemble des cases où on peut placer des cases noires.
   Il y a $\binom{38}{10}$ grille n'ayant aucune case noire dans un coin.

   (b) On distingue les cas.

   - Grilles avec aucune case noire dans des coins
     D'après la question 2a, il y a $\binom{38}{10}$ telles grilles.
   - Grilles avec exactement une case noire dans un coin
     Pour construire une telle grille :
     → On choisit le coin dans lequel il y a une case noire : il y a 4 possibilités.
     → On choisit simultanément les emplacements des 9 cases noires restantes, ailleurs que dans des coins : il y a $\binom{38}{9}$ façons de le faire.
   - Grilles avec exactement deux cases noires dans des coins
     Pour construire une telle grille :
     → On choisit les coins qui sont occupés par des cases noires : il y a $\binom{4}{2}$ façons de le faire.
     → On choisit simultanément les emplacements des 8 cases noires restantes, ailleurs que dans des coins : il y a $\binom{38}{8}$ façons de le faire.

   Il y a $\binom{38}{10} + 4 \times \binom{38}{9} + \binom{4}{2} \times \binom{38}{8}$ grilles avec au plus deux cases noires dans des coins.

   (c) On raisonne à partir du contraire ; on dénombre les grilles qui n'ont aucune case noire dans la première ligne.
   Le raisonnement est le même qu'à la question 1, mais avec seulement 35 cases autorisées (toutes sauf celles de la première ligne). Il y a donc $\binom{35}{10}$ grilles qui n'ont aucune case noire dans la première ligne.
   Il y a $\binom{42}{10} - \binom{35}{10}$ grilles qui ont au moins une case noire dans la première ligne.

   (d) On distingue les cas.

   - Grille n'ayant pas de case noire à l'intersection de la dernière ligne et de la première colonne
     Pour construire une telle grille :
     → On choisit une case dans la dernière ligne (mais pas dans la première colonne) : il y a 6 possibilités.
     → On choisit une case dans la première colonne (mais pas dans la dernière ligne) : il y a 5 possibilités.
     → On place simultanément les 8 cases noires restantes dans les $6 \times 5 = 30$ cases encore autorisées : il y a $\binom{30}{8}$ façons de le faire.
   - Grille ayant une case noire dans la dernière ligne de la première colonne
     Pour construire une telle grille :
     → On place une case noire dans la dernière ligne de la première colonne : il n'y a pas de choix.
     → On place les 9 cases noires restantes dans les 30 cases encore autorisées : il y a $\binom{30}{9}$ façons de le faire.

   Il y a $6 \times 5 \times \binom{30}{8} + \binom{30}{9}$ grilles ayant une seule case noire dans la dernière ligne et une seul case noire dans la première colonne.

3. On choisit l'une de ces grilles.
   Il reste donc 32 cases libres. Chacune peut être remplie par l'une des 26 lettres de l'alphabet.
   Pour remplir ces cases, il y a un ordre et les répétitions sont possibles.
   Il y a 26^{32} façons de remplir l'une de ces grilles.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction $x \mapsto x^n e^{1-x}$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale I_n existe.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n \text{ existe.}}$

2. $I_0 \;=\; \dfrac{1}{0\,!}\displaystyle\int_0^1 x^0 e^{1-x}\,dx \;=\; 1 \times \int_0^1 e^{1-x}\,dx \;=\; \Big[-e^{1-x}\Big]_0^1 \;=\; -e^0 + e^1$

   Ainsi, $\boxed{I_0 = e - 1}$.

   $I_1 \;=\; \dfrac{1}{1\,!}\displaystyle\int_0^1 x^1\, e^{1-x}\,dx \;=\; \int_0^1 x\, e^{1-x}\,dx$

   On pose :
   $$\begin{cases} u'(x) = e^{1-x} & u(x) = -e^{1-x} \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ de dérivées continues.
   Donc la formule d'intégration par parties s'applique.

   $$I_1 \;=\; \Big[-x\, e^{1-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx \;=\; -1 + \Big[-e^{1-x}\Big]_0^1 \;=\; -1 - 1 + e$$

   Ainsi, $\boxed{I_1 = e - 2}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On pose :
   $$\begin{cases} u'(x) = e^{1-x} & u(x) = -e^{1-x} \\ v(x) = x^{n+1} & v'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ de dérivées continues.
   Donc la formule d'intégration par parties s'applique.

   $$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)\,!}\left(\Big[-x^{n+1}\, e^{1-x}\Big]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)\,!}\Big(-1 + (n+1) \times (n!) \times I_n\Big) \\ &= -\frac{1}{(n+1)\,!} + I_n \end{aligned}$$

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)\,!}\ .}$$

4. On procède par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 0$
     D'une part, $I_0 = e - 1$ (question 2)
     D'autre part, $e - \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k\,!} \;=\; e - \frac{1}{0!} \;=\; e - 1$
     Donc la propriété est vraie au rang 0.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}$. On calcule alors :

     $$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n - \frac{1}{(n+1)\,!} && \text{(question 3)} \\ &= e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} - \frac{1}{(n+1)\,!} && \text{(HR)} \\ &= e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k\,!} \end{aligned}$$
   - Conclusion
     $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\ .}$$

Exercice 3

Partie A

1. On sait que d passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{u}$. Donc :

Une représentation paramétrique de d est : $$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 12t + 2$. D'où le tableau :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(\frac{1}{6})$	$\nearrow$

Ce tableau prouve que $\boxed{f \text{ admet un minimum}}$.
De plus, la valeur de ce minimum est :
$$f(-\frac{1}{6}) = 6 \times \frac{1}{36} - 2 \times \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + 1 = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$$
$$\boxed{\text{La valeur de ce minimum est } \alpha = \frac{5}{6} .}$$

3. Soit $N(x_N, y_N, z_N) \in d$.
D'après la question 1, il existe $t_N \in \mathbb{R}$ tel que : $x_N = 1 - 2t_N$, $y_N = t_N$ et $z_N = 1 + t_N$.
On calcule alors :
$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{MN}||^2 &= (x_N - 1)^2 + (y_N + 1)^2 + (z_N - 1)^2 \\ &= (1 - 2t_N - 1)^2 + (t_N + 1)^2 + (1 + t_N - 1)^2 \\ &= 4t_N^2 + t_N^2 + 2t_N + 1 + t_N^2 \\ &= f(t_N) \end{aligned}$$
C'est ce qu'on voulait.
$$\boxed{\text{Pour tout } N \in d, \text{ il existe } t_N \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(t_N) = ||\overrightarrow{MN}||^2 .}$$

4. Soit $N \in d$ et t_N le réel associé par la question 3.
On sait que la fonction f admet pour minimum $\frac{5}{6}$ (question 2), donc : $||\overrightarrow{MN}||^2 = f(t_N) \geqslant \frac{5}{6}$
Tous les membres sont positifs, on peut passer à la racine dans l'inégalité et on obtient : $||\overrightarrow{MN}|| \geqslant \sqrt{\alpha}$.
$$\boxed{\text{Pour tout } N \in d, \ ||\overrightarrow{MN}|| \geqslant \frac{5}{6} .}$$

5. On pose $t_H = -\frac{1}{6}$.
Le point de la droite d associée à t_H est $H\Big(1 - 2t_H \, , \, t_H \, , \, 1 + t_H\Big)$, c'est-à-dire $H\Big(\frac{4}{3} \, , -\frac{1}{6} \, , \, \frac{5}{6}\Big)$.
Pour ce point H, on a : $||\overrightarrow{MH}|| = \sqrt{f(t_H)} = \sqrt{f\Big(-\frac{1}{6}\Big)} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\alpha}$.
$$\boxed{\text{Il existe } H \in d \text{ tel que } ||\overrightarrow{MH}|| = \sqrt{\alpha} .}$$
Par définition, $\Delta(\{M\}, d)$ est la borne inférieure de l'ensemble des distances MN (avec $N \in d$).
D'après la question 4, cet ensemble est minoré par $\sqrt{\alpha}$.
D'après le début de la question 5, $\sqrt{\alpha}$ appartient à cet ensemble.
Ces deux points prouvent que $\sqrt{\alpha}$ est en fait le minimum de cet ensemble ; c'est donc aussi sa borne inférieure.
Ceci prouve que $\boxed{\Delta(\{M\}, d) = \sqrt{\frac{5}{6}} .}$

Partie B

1. P admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ où a,b,c,d sont des réels à déterminer.
   P est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et admet $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.
   Pour déterminer a,b,c, on résout :
   $\begin{cases}\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{u} = 0\\ \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{v} = 0\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0\\ 2a + b - c = 0\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0\\ a + 2b = 0 \quad L_2 - L_1\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} c = a-b = -3b\\ a = -2b\end{cases}$
   Ainsi, en prenant $b=1$, on obtient $a=-2$ et $c=-3$ et P a pour équation $-2x+y-3z+d=0$.
   Pour déterminer d, on utilise le fait que$A(1,0,2)\in \mathrm{P}$:
   $-2\times 1+0-3\times 2+d=0 \;\Leftrightarrow\; d=8$
   $\boxed{\mathrm{P} \text{ a pour équation cartésienne } -2x+y-3z+8=0\ .}$
2. Soit $H(x,y,z)$ un point de l'espace. La question revient à résoudre (en conservant les notations de la question 1) :
   $\begin{cases} H\in \mathrm{P}\\ \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{u} = 0\\ \overrightarrow{MH}\,.\,\overrightarrow{v} = 0\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 3z = -8\\ x - y - z = -3\\ 2x + y - z = 1\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 3z = -8\\ - y - 5z = -14 \quad (L_1+2L_2)\\ 2y - 4z = -7 \quad (L_1+L_3)\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 3z = -8\\ - y - 5z = -14\\ - 14z = -35 \quad (2L_2+L_3)\end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\big(y-3z+8\big) = 1\\ y = -5z+14 = \frac{3}{2}\\ z = \frac{5}{2}\end{cases}$
   $\boxed{\text{Il existe un unique point } H \text{ de } \mathrm{P} \text{ tel que } \overrightarrow{MH} \text{ soit orthogonal à } \mathrm{P} \text{ et c'est } H\Big(1\,,\,\frac{3}{2}\,,\,\frac{5}{2}\Big)\ .}$
3. Soit $N\in \mathrm{P}$.
   D'une part, le point M n'appartient pas à P (ces coordonnées ne vérifient pas l'équation de la question 1).
   De plus, $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à P, donc $\overrightarrow{MH}$ est en particulier orthogonal à $\overrightarrow{HN}$.
   Ainsi, le triangle HMN est rectangle en H ; le théorème de Pythagore s'applique. C'est ce qu'on voulait.
   $\boxed{\text{Pour tout } N\in \mathrm{P},\ ||\overrightarrow{MN}||^2 = ||\overrightarrow{MH}||^2 + ||\overrightarrow{HN}||^2\ .}$
4. Par définition, $\Delta(\{M\},\mathrm{P})$ est la borne inférieur de l'ensemble des distances MN (avec $N\in\mathrm{P}$).
   Soit $N\in \mathrm{P}$.
   D'après la question 3, $||\overrightarrow{MN}||^2 \geqslant ||\overrightarrow{MH}||^2$ et donc (tous les membres sont positifs) $||\overrightarrow{MN}|| \geqslant ||\overrightarrow{MH}||$.
   L'ensemble qui nous intéresse est donc minoré par $||\overrightarrow{MH}||$.
   De plus, $||\overrightarrow{MH}||$ appartient à l'ensemble qui nous intéresse.
   Ceci prouve que $||\overrightarrow{MH}||$ est en fait le minimum de cet ensemble ; c'est donc aussi sa borne inférieure.
   Enfin, on calcule : $||\overrightarrow{MH}|| = \sqrt{1^2+\Big(\frac{3}{2}-2\Big)^2+\Big(\frac{5}{2}-1\Big)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.
   $\boxed{\Delta(\{M\},\mathrm{P}) = \frac{\sqrt{14}}{2}\ .}$

Partie C

1. (a) d_1 passe par $A(2,1,2)$ et est dirigée par $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d_1 a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) On transforme :

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + y = 0 \quad L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 - x - 2y = -1 + 3x \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

d_1 a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. On note $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de l'espace.

On note par ailleurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d_1 et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d_2 .

On résout :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -3b + 2c = 0 \quad L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3}c \\ b = \frac{2}{3}c \end{cases}$$

On constate que $\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} \text{ est un vecteur non nul orthogonal à } d_1 \text{ et à } d_2 \,.}$

3. Soit $H \in d_1$ et $K \in d_2$.
D'après la question 1, il existe $t \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$ tels que $H(\,2+t\,,\,1+t\,,\,2+t\,)$ et $K(\,T\,,\,-2T\,,\,-1+3T\,)$.
Comme $\overrightarrow{n}$ est non nul, $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HK} = \lambda\overrightarrow{n}$.

On résout donc :

$$\left\{ \overrightarrow{HK} = \lambda\overrightarrow{n} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcr} T & -2-t & = & -5\lambda \\ -2T & -1-t & = & 2\lambda \\ -1+3T & -2-t & = & 3\lambda \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcccccc} T & - & t & + & 5\lambda & = & 2 \\ -2T & - & t & - & 2\lambda & = & 1 \\ 3T & - & t & - & 3\lambda & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lccccccl} T & - & t & + & 5\lambda & = & 2 & \\ 3T & & & + & 7\lambda & = & 1 & L_1 - L_2 \\ 2T & & & - & 8\lambda & = & 1 & L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lccccccl} T & - & t & + & 5\lambda & = & 2 & \\ 3T & & & + & 7\lambda & = & 1 & \\ & & & & 38\lambda & = & -1 & 2L_2 - 3L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & = & -\frac{33}{19} \\ T & = & \frac{15}{38} \\ \lambda & = & -\frac{1}{38} \end{array}\right.$$

Il existe un unique point $H \in d_1$ et un unique point $K \in d_2$ tels que $\overrightarrow{HK}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Ce sont :

$$H\left(\frac{5}{19}, -\frac{14}{19}, \frac{5}{19}\right) \qquad \text{et} \qquad K\left(\frac{15}{38}, -\frac{30}{38}, \frac{7}{38}\right)$$

4. $\Delta(d_1, d_2)$ est la borne inférieure de l'ensemble des distances entre un point de d_1 et un point de d_2.
   Or, la norme $||\overrightarrow{HK}||$ appartient à l'ensemble de ces distances.
   Donc $\boxed{||\overrightarrow{HK}|| \geqslant \Delta(d_1, d_2)}$.
5. Soient $M \in d_1$ et $N \in d_2$. On calcule :

$$\begin{array}{rrcl} & \overrightarrow{MN} & = & \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN} \qquad \text{(relation de Chasles)} \\ \text{d'où} & ||\overrightarrow{MN}||^2 & = & ||\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KN}||^2 \\ \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MN}||^2 & = & ||\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{HK}||^2 \\ \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MN}||^2 & = & \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{HK}\right) . \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{HK}\right) \\ \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{MN}||^2 & = & ||\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}||^2 + ||\overrightarrow{HK}||^2 + 2\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}\right) . \overrightarrow{HK} \end{array}$$

   Or : $\overrightarrow{HK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MH}$ et à $\overrightarrow{KN}$. Donc le produit scalaire précédent vaut 0.
   D'où : $\boxed{\text{Pour tout } M \in d_1 \text{ et } N \in d_2,\ ||\overrightarrow{MN}||^2 = ||\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN}||^2 + ||\overrightarrow{HK}||^2}$.
6. Par des arguments similaires à ceux de la question B4, on en déduit que $\Delta(d_1, d_2)$ est en fait la longueur HK.
   Or, $||\overrightarrow{HK}|| = \sqrt{\left(\frac{15}{38} - \frac{10}{38}\right)^2 + \left(-\frac{30}{38} + \frac{28}{38}\right)^2 + \left(\frac{7}{38} - \frac{10}{38}\right)^2} = \frac{\sqrt{25+4+9}}{38} = \frac{\sqrt{38}}{38}$

$$\boxed{\Delta(d_1, d_2) = \frac{\sqrt{38}}{38}}$$

Exercice 4

1. f est solution de (E_1) donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - f(-x)$.
   Or, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (solution d'une équation différentielle).
   Donc, par les théorèmes opératoires, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   C'est-à-dire : $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f''(x) &= 2x - (-1)\, f'(-x) \\ &= 2x + f'(-x) \\ &= 2x + (-x)^2 - f(x) \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (E_1)) \\ &= 2x + x^2 - f(x) \end{aligned}$$
   $\boxed{f \text{ est solution de } (E_2) : \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) = 2x + x^2 .}$
2. - Equation caractéristique
     On résout $x^2 + 1 = 0$: les solutions sont i et $-i$.
   - Equation homogène
     L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :
     $$\left\{ \begin{array}{llll} Y & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x) \end{array} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
   - Solution particulière
     On note $y_0 : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels à déterminer.
     $$\begin{aligned} & y_0 \text{ est solution de l'équation} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R},\ y_0''(x) + y_0(x) = x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R},\ 2a + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 2 \\ c + 2a & = & 0 \end{array} \right. \\ & \text{(par identification)} \end{aligned}$$
     Ainsi, la fonction $y_0 : x \mapsto x^2 + 2x - 2$ est une solution particulière de l'équation.
   - Conclusion
     L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :
     $$\boxed{\left\{ \begin{array}{llll} Y & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x) + x^2 + 2x - 2 \end{array} \quad , \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$
3. f est solution de (E_1) donc f est solution de (E_2) donc il existe K_1 et K_2 des réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x) + x^2 + 2x - 2$.
   Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $f'(x) = -K_1 \sin(x) + K_2 \cos(x) + 2x + 2$
   D'où, en injectant dans (E_1) :
   $$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R},\ -K_1 \sin(x) + K_2 \cos(x) + 2x + 2 + K_1 \cos(-x) + K_2 \sin(-x) + (-x)^2 - 2x - 2 = x^2 \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(K_1 + K_2\Big) \cos(x) + \Big(-K_1 - K_2\Big) \sin(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(K_1 + K_2\Big)\Big(\cos(x) + \sin(x)\Big) = 0 \end{aligned}$$
   Or, le seul moyen pour que l'égalité précédente soit vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est d'avoir $K_1 = -K_2$.
   En notant $A = K_1$, on obtient :
   $\boxed{\text{Il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ soit de la forme } f : x \mapsto A\Big(\cos(x) - \sin(x)\Big) + x^2 + 2x - 2 .}$