DM6 - Pour le jeudi 20 mars

Exercice 1

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) définie par :

$$(E_n) \ : \ e^x + x = n$$

d'inconnue le réel x.

On définit par ailleurs la fonction f par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x + x \end{array}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application bijective.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation (E_n) admet une unique solution réelle, que l'on notera x_n.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant 0$.
4. Etudier les variations de la suite (x_n).
   Pour cela, on pourra exprimer x_n *en fonction de* n *et de la bijection réciproque* f^{-1} *de* f.
5. La suite (x_n) admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 2

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble F_λ par :

$$F_\lambda = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \Big(\ (1-\lambda)x + y \ , \ 2x + (1-\lambda)y + 2z \ , \ y + (1-\lambda)z \ \Big) = (0,0,0) \right\}$$

1. Dans cette question, on suppose que $\lambda = 1$.
   Démontrer que F_1 est un espace vectoriel. Déterminer une base de F_1 et sa dimension.
2. (a) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $F_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   (b) Pour chaque valeur de λ obtenue à la question précédente, démontrer que F_λ est un espace vectoriel et en déterminer une base et la dimension.
3. On rassemble les bases obtenues à la question précédente en une seule famille B.
   Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.