

Méthodes numériques concernant les fonctions

Exercice 1

Dans cet exercice, on ne demande aucune justification mathématique.

On définit le polynôme réel P par :

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^7 + 21x^2 + 21x + 1 \end{aligned}$$

1. Faire afficher la représentation graphique de P .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de chaque racine de P .
3. Dresser le tableau de variations de P .

On ne cherchera pas à faire figurer les valeurs exactes mais seulement des valeurs approchées à 10^{-3} .

Exercice 2

On définit la fonction f par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

1. Questions mathématiques

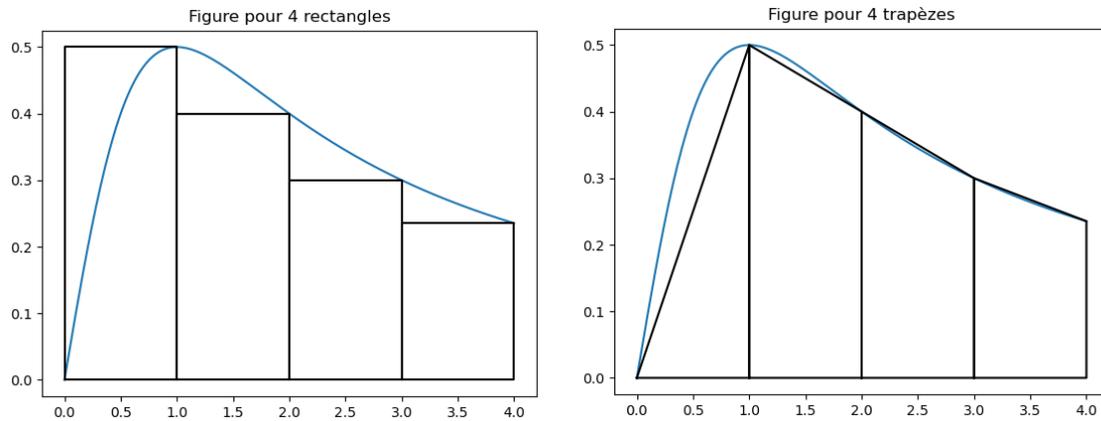
- (a) Justifier que f est bien définie.
- (b) Justifier que f est positive.
- (c) Dresser le tableau de variations de f . On fera figurer les limites.
- (d) Justifier que f admet des primitives sur \mathbb{R} et que pour tous a, b réels avec $a < b$, $\int_a^b f(t) dt$ existe.

2. Questions informatiques

- (a) Faire afficher la représentation graphique de f et confirmer les résultats des questions 1b et 1c.
- (b) Ecrire une fonction Python qui prend en argument deux réels a et b (pour lesquels on suppose que $a < b$) et qui renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$.
On utilisera la méthode des rectangles.
- (c) Proposer une méthode informatique pour faire afficher la représentation graphique d'une primitive de f .

Exercice 3

On peut calculer la valeur approchée de l'intégrale d'une fonction positive par la méthode des trapèzes. L'idée générale est la même que celle de la méthode des rectangles, sauf qu'on remplace les rectangles par des trapèzes. La figure ci-dessous présente la comparaison des deux méthodes pour une même fonction :



Pour la suite de l'exercice, on définit la fonction f par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(C'est la même fonction que dans l'exercice 2.)

1. Ecrire une fonction Python qui permette d'afficher l'illustration de la méthode des trapèzes pour la fonction f .
2. Ecrire une fonction Python qui prend en argument deux réels a et b (pour lesquels on suppose que $a < b$) et qui renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$.
On utilisera la méthode des trapèzes.
3. Comparer la vitesse de convergence des deux méthodes.