Nom : ....

Interrogation 10 - Mardi 4 mars 2025

1. Compléter avec les valeurs à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$					
$\sin(x)$					
$\tan(x)$					

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   Compléter les formules trigonométriques suivantes :
   - $\cos(\pi - \theta) =$ ....
   - $\sin(\pi - \theta) =$ ....
   - $\cos(-\theta) =$ ....
   - $\sin(-\theta) =$ ....
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$:
   (a) $\cos(a + b) =$

   (b) $\sin(a + b) =$
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
   $\cos(x) = \cos(y)$

   $\Leftrightarrow$
5. Compléter la proposition relative à l'expression explicite d'une suite arithmétique :

   Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
6. Compléter la proposition relative à l'expression explicite d'une suite géométrique :

   Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$
7. Compléter la proposition relative à la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

   Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
   Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$.

   $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$

8. Soit (u_n) une suite vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

On note $(E)\ :\ x^2 = ax + b$ l'équation caractéristique associée et Δ le discriminant de (E).
Compléter avec la proposition relative à l'expression explicite du terme général de (u_n) dans chacun des cas suivants :

- Si $\Delta > 0$
- Si $\Delta = 0$
- Si $\Delta < 0$

9. Compléter l'énoncé du critère des suites extraites :

Soit (u_n) une suite réelle.

10. Compléter le théorème des gendarmes pour des suites :

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles.

11. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On suppose que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Que peut-on dire au sujet de leurs limites respectives ?

12. Soient (u_n) une suite réelle et $L \in \dots\dots\dots$
Compléter :

$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} L \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dots\dots\dots$

13. Soit f une fonction monotone définie sur un intervalle $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Compléter le théorème de la limite monotone (version détaillée).
Si f est croissante majorée sur I, alors

....

Si f est croissante non majorée sur I, alors

....

Si f est décroissante minorée sur I, alors

....

Si f est décroissante non minorée sur I, alors

....

14. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a sauf éventuellement en a.
On suppose que, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$.
Compléter :

(a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots\dots$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots\dots$

(b) Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots\dots$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots\dots$

15. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a sauf éventuellement en a.
On suppose que :

- pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$
- f et g convergent en a

Comparer leurs limites :

16. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

17. Enoncer le théorème sur l'image par une fonction continue d'un segment (ou théorème des bornes atteintes).

18. Enoncer le théorème de la bijection.

19. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a sauf éventuellement en a.
Compléter avec un critère de négligeabilité :

$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow$

20. Enoncer les critères de croissances comparées pour $\ln(n)$, n^α $(\alpha > 0)$, e^n et $n!$ $(n \in \mathbb{N})$.

21. Compléter avec les formules de dérivées usuelles :
   (a) Si $f : x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z})$ alors :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (b) Si $f : x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ alors :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (c) Si $f : x \mapsto \sin(x)$ alors :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (d) Si $f : x \mapsto \cos(x)$ alors :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

22. Compléter avec les formules de primitives usuelles :
   (a) Si $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ alors une primitive F de f est définie par :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (b) Si $f : x \mapsto \cos(x)$ alors une primitive F de f est définie par :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (c) Si $f : x \mapsto e^x$ alors une primitive F de f est définie par :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots,\ F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (d) Si $f : x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ alors une primitive F de f est définie par :

   $\forall x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

   $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

23. On considère l'équation différentielle $(\mathsf{E}_0)\ :\ y' = ay$ définie sur l'intervalle I, a désignant une fonction continue et y désignant l'inconnue.

    On note A une primitive de a sur I.

    L'ensemble des solutions de (E_0) est :

24. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

    On note f_0 une solution particulières de l'équation différentielle $(\mathsf{E})\ :\ y' + ay = b$.

    Compléter avec l'énoncé du théorème sur la structure des solutions de $y' + ay = b$:

25. Enoncer le théorème de superposition dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

26. On note E, F, G trois ensembles ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

    Enoncer dans ce cas le théorème relatif aux composées d'injections, de surjections et de bijections (avec la formule pour la réciproque dans le cas bijectif).

27. Enoncer la formule du binôme de Newton dans le cas de matrices.

28. Enoncer la proposition relative à l'inversibilité des matrices triangulaires.

29. Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
    Compléter :

    (a) $\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

    (b) $\left(\lambda A\right)^{\mathsf{T}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

    (c) $\left(A + B\right)^{\mathsf{T}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

30. Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même taille.
Compléter :

$\left(\mathsf{AB}\right)^{-1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

31. Enoncer la proposition relative à l'inversibilité des matrices carrées de taille 2.

32. Soient P et Q deux polynômes réels. Enoncer la proposition sur le degré de $\mathsf{P}+\mathsf{Q}$.

33. Soient P un polynôme réel et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Compléter avec la définition et la caractérisation :

α est une racine de P

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

34. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. Compléter avec la caractérisation :
$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des racines d'un polynôme réel P

$\Leftrightarrow$

35. Soient P un polynôme réel et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Compléter :
α est une racine multiple de P

$\Leftrightarrow$

36. Enoncer la formule de symétrie des coefficients binomiaux.

37. Enoncer la formule du triangle de Pascal.

38. Soient E un ensemble fini à n éléments et $p \in [\![0, n]\!]$.
Compléter :

(a) Il y a .... permutations de E.

(b) Il y a .... sous-ensembles de E à p éléments.

(c) Il y a .... p-uplets de E sans répétition.

39. On note $\big((x_i, y_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une série statistique bivariée. D'après la formule de König-Huygens, la covariance de cette série est donnée par :

   (a) *(formule avec les notations $\overline{x}, \ldots$)*

   (b) *(formule en explicitant avec des symbole $\sum$)*

40. On note $\big((x_i, y_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une série statistique bivariée.
On suppose que $s_x \neq 0$.
L'ajustement affine est réalisé par la droite d'équation $y = ax + b$ avec :

$a =$

$b =$