Semaine 19 - Lundi 10 mars au lundi 14 mars

Chap 18 - Limites et continuité

III/ Continuité

1. Définitions
   - Définitions : continuité en a, à gauche, à droite, sur un intervalle, notation $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
   - Exemples : exponentielle, ln, les polynômes, sin, cos, tan, racine et valeur absolue sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs
2. Continuité et opérations
   - Proposition : continuité de $f+g$, λf, fg, $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$
   - Proposition : continuité de $g \circ f$
3. Prolongement par continuité
   - Proposition : prolongement par continuité
4. Théorèmes de continuité
   - Théorème fondamental : l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervelle
   - Théorème des valeurs intermédiaires
   - Théorème des bornes atteintes
5. Théorème de la bijection
   - Théorème de la bijection
   - Proposition : déterminer $f(I)$
   - Exemple fondamental : arctan (définition, variations, continuité, imparité, représentation graphique)

Chap 19 - Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et sous-espaces vectoriels

Introduction

- Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition : combinaison linéaire

I/ Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$
   - Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Règles de calcul
   - Propositions : unicité du neutre, unicité de l'opposé
   - Proposition : $0 \,.\, u = 0_{\mathbb{K}^n}$; $\lambda \,.\, 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$; $\lambda \,.\, u = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_{\mathbb{K}^n}$; $(-1) \,.\, u = -u$
3. Exemples d'autres $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
   - Exemples issus de l'algèbre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l'ensemble des polynômes réels, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène
   - Exemples issus de l'analyse : l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de suites réelles, l'ensemble des suites qui vérifient une relation de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$, l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire homogène

II/ Sous-espaces vectoriels

1. Définition
   - Définition : F est un sev de $\mathbb{K}^n$ ssi $F \subset \mathbb{K}^n$, F contient le neutre de $\mathbb{K}^n$ et F est stable par combinaison linéaire
   - Exemples : les droites passant par l'origine sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et les plans passant par l'origine sont des sev de $\mathbb{R}^3$
2. Intersection de sous-espaces vectoriels
   - Proposition : l'intersection de deux sev de $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
   - Corollaire : l'intersection de k sev de $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
3. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

- Définition : espace vectoriel engendré par une famille, notation $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
- Proposition : $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un espace vectoriel

III/ Familles finies de vecteurs

1. Familles génératrices
   - Définition : famille génératrice d'un espace vectoriel
   - Proposition : toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
2. Familles libres et familles liées
   - Définitions : familles liées et familles libres
   - Proposition : une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres
   - Proposition : toute sous-famille d'une famille libre est libre
   - Proposition : caractérisation des familles libres ; une famille est libre ssi l'argument "par identification" est valable
3. Bases
   - Définition : base
   - Exemple : base canonique de $\mathbb{K}^n$
   - Proposition : caractérisation des bases ; une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F ssi tout vecteur de F peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_k$

Informatique

Tout ce qui a été vu en Python reste au programme.

Questions de cours

1. *Sans preuve*
   Enoncer le théorème sur l'image continue d'un intervalle et le théorème des valeurs intermédiaires.
2. *Sans preuve*
   Enoncer le théorème de la bijection et la proposition sur la forme de $J = f(I)$.
3. *Avec preuve*
   Etude de arctan : définition exacte, continuité, variations, représentation graphique.
4. *Avec preuve*
   L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
5. *Avec preuve*
   Caractérisation des bases : une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F ssi tout vecteur de F peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_k$.