Dérivation

Dérivabilité

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{|x|+1} \end{array}$$

On note C la représentation graphique de f.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que C admet une tangente T en son point d'abscisse 0 et déterminer une équation de T.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer et déterminer une expression de f^{-1}.

Exercice 2

1. (a) Démontrer que :
$$\forall x \in [\,0\,,+\infty[\,,\ \sin(x) \leqslant x$$
   (b) Démontrer que :
$$\forall x \in [\,0\,,+\infty[\,,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$$
   (c) Déterminer des inégalités similaires pour $x \leqslant 0$.
2. On définit $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
   (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
   On continuera de noter f la fonction ainsi prolongée.
   (b) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que f' est continue.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Si oui, f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. Si oui, f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\,,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{x^2+1} - x)$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer f', en simplifiant l'expression au maximum et en déduire une expression simple de f.

Exercice 6

1. Rappeler la définition de arcsin et arccos.
2. Démontrer que arcsin est dérivable sur un ensemble D_1 que l'on précisera et que, pour tout $x \in D_1$:
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. Démontrer que arccos est dérivable sur un ensemble D_2 que l'on précisera et donner une expression de $\arccos'$.
4. Démontrer que, pour tout $x \in [-1,1]$:
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Théorèmes liés à la dérivabilité

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f dérivable sur $[a,b]$ s'annulant au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[a,b]$.

Exercice 8

En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \left[\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$.

Exercice 9

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.
On suppose qu'il existe un $a > 0$ tel que :

$$f(0) = f'(0) = f(a) = 0$$

Montrer qu'il existe un point $M \in \mathcal{C}$ différent de l'origine tel que la tangente à $\mathcal{C}$ en M passe par l'origine.

Indication : on pourra utiliser la fonction g définie par :

$$g : \begin{array}{rcl} [0,a] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 10

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que, pour tout $x \in [a, b]$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   Indication : on pourra poser $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bien choisi.*
3. Démontrer la règle de l'Hôpital, à savoir :

$$\text{si } \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l, \text{ alors } \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

4. *Application.*
   Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - \cos(x)}{4x}$.

Exercice 11

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Déterminer les extrema (locaux et globaux) de f.

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.
2. En déduire une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer la dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme $P : x \mapsto x^n$ selon la valeur de k.

Exercice 14

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démontrer que :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Approfondissement

Exercice 15

On définit f par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + \cos(x) \end{array}$$

Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et dérivables en 1 telles que :

$$(E) \ : \ \forall x, y \in]\,0, +\infty\,[\,, \ f(xy) = f(x) + f(y)$$

1. Quelle fonction usuelle est solution de (E) ?
2. Soit f une solution de (E).
   (a) Combien vaut $f(1)$?
   (b) Montrer que f est dérivable sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$ et que, pour tout $x \in]\,0\,,\,+\infty\,[$:

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$$

3. Conclure quant aux solutions de (E).