Semaine 20 - Lundi 17 mars au vendredi 21 mars

Chap 19 - Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et sous-espaces vectoriels

Introduction

- Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
- Définition : combinaison linéaire

I/ Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$
   - Définition : $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Règles de calcul
   - Propositions : unicité du neutre, unicité de l'opposé
   - Proposition : $0 \,.\, u = 0_{\mathbb{K}^n}$; $\lambda \,.\, 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$; $\lambda \,.\, u = 0_{\mathbb{K}^n} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_{\mathbb{K}^n}$; $(-1) \,.\, u = -u$
3. Exemples d'autres $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
   - Exemples issus de l'algèbre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l'ensemble des polynômes réels, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène
   - Exemples issus de l'analyse : l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de suites réelles, l'ensemble des suites qui vérifient une relation de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire homogène

II/ Sous-espaces vectoriels

1. Définition
   - Définition : F est un sev de $\mathbb{K}^n$ ssi $F \subset \mathbb{K}^n$, F contient le neutre de $\mathbb{K}^n$ et F est stable par combinaison linéaire
   - Exemples : les droites passant par l'origine sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et les plans passant par l'origine sont des sev de $\mathbb{R}^3$
2. Intersection de sous-espaces vectoriels
   - Proposition : l'intersection de deux sev de $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
   - Corollaire : l'intersection de k sev de $\mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
3. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
   - Définition : espace vectoriel engendré par une famille, notation $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
   - Proposition : $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un espace vectoriel

III/ Familles finies de vecteurs

1. Familles génératrices
   - Définition : famille génératrice d'un espace vectoriel
   - Proposition : toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
2. Familles libres et familles liées
   - Définitions : familles liées et familles libres
   - Proposition : une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres
   - Proposition : toute sous-famille d'une famille libre est libre
   - Proposition : caractérisation des familles libres ; une famille est libre ssi l'argument "par identification" est valable
3. Bases
   - Définition : base
   - Exemple : base canonique de $\mathbb{K}^n$
   - Proposition : caractérisation des bases ; une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F ssi tout vecteur de F peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_k$

IV/ Dimension

1. Espaces vectoriels de dimension finie
   - Définition : espace vectoriel de dimension finie
   - Théorème : tout sev de $\mathbb{K}^n$ non réduit au vecteur nul admet une base et toutes les bases de F ont le même cardinal, appelé dimension de F et notée $\dim(F)$
2. Dimension et familles de vecteurs
   - Proposition : dans un sev $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ de dimension p ; une famille libre possède au maximum p vecteurs ; une famille libre peut être complétée en une base de F ; une famille libre qui possède p vecteurs est une base de F
   - Corollaire : dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non nuls orthogonaux forment une base ; dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux forment une base

- Proposition : dans un sev $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ de dimension p ; une famille génératrice de F possède au minimum p vecteurs ; de toute famille génératrice de F on peut extraire une base de F ; une famille génératrice de F qui possède p vecteurs est une base de F

3. Dimension et sous-espaces vectoriels
   - Proposition : si F et G sont deux sev de $\mathbb{K}^n$ et $F \subset G$, alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$
   - Proposition : si F et G sont deux sev de $\mathbb{K}^n$ avec $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$
4. Rang d'une famille finie de vecteurs
   - Définition : rang d'une famille de vecteurs, notation $rg(u_1, \dots, u_k)$
   - Proposition : dans un sev F de dimension p, on considère une famille $(u_1, \dots, u_k)$; $rg(u_1, \dots, u_k) \leqslant k$; $rg(u_1, \dots, u_k) \leqslant p$; $rg(u_1, \dots, u_k) = k$ ssi $(u_1, \dots, u_k)$ est libre ; $rg(u_1, \dots, u_k) = p$ ssi $(u_1, \dots, u_k)$ est génératrice de F
   - Proposition : le rang d'une famille de vecteurs est inchangé si on permute deux vecteurs, si on multiplie un vecteur par un scalaire non nul, si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres

Chap 20 - Dérivation

I/ Dérivabilité d'une fonction

1. Définitions
   - Définitions : dérivabilité en a, nombre dérivé, notations $f'(a)$ et $\dfrac{df}{dx}$
   - Définitions : dérivabilité à gauche et à droite
   - Proposition : f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$
   - Définitions : dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée
2. Caractérisation
   - Définition : développement limité à l'ordre 1, notation $DL_1(a)$
   - Proposition : f est dérivable en a ssi f admet un $DL_1(a)$ avec $a_0 = f(a)$; dans ce cas le $DL_1(a)$ est $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$
   - Corollaire : si f est dérivable en a, alors f est continue en a
3. Interprétation graphique
   - Taux d'accroissement / pente de la dérivée
   - Nombre dérivé / pente de la tangente
   - Développement limité
4. Opérations
   - Somme, produit par un scalaire, produit, inverse, quotient
   - Composée
   - Réciproque
   - Exemple fondamental : arctan
5. Dérivées usuelles

Informatique

Tout ce qui a été vu en Python reste au programme.

Questions de cours

1. *Avec preuve*
   L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. *Avec preuve*
   Caractérisation des bases : une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de F ssi tout vecteur de F peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_k$.
3. *Sans preuve*
   Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel et la proposition qui fait le lien entre dimension et familles libres ainsi que la proposition qui fait le lien entre dimension et familles génératrices.
4. *Avec preuve*
   La dérivabilité équivaut à l'existence d'un développement limité.
5. *Avec preuve*
   Enoncer le proposition sur la dérivée de la réciproque (sans preuve) et en déduire la dérivée de arctan (avec preuve).