Dérivation

Exercice 1 (Correction *très* rapide)

1. Le faire.
2. Cela revient à justifier que f est dérivable en 0.
   On trouve $f'(0)$ existe et vaut 1.
   Une équation de la tangente est $y = x$.
3. On vérifie qu'on peut utiliser le théorème de la bijection et on l'utilise.
   L'ensemble à déterminer est $]-1, 1[$.
   Pour $f^{-1}(y)$ on trouve une expression qui dépend du signe de y.

Exercice 2 (Correction complète)

1. (a) On définit la fonction φ par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & [\,0\,,+\infty\,[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x - \sin(x) \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, φ est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$.
Pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, $\varphi'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$
On a donc le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
φ	0 $\nearrow$

Ceci prouve que, pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, $0 \leqslant \varphi(x)$, c'est-à-dire $\sin(x) \leqslant x$.

$\boxed{\forall x \in [\,0\,,+\infty[,\ \sin(x) \leqslant x}$

(b) On définit la fonction ψ par :

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & [\,0\,,+\infty\,[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x - \dfrac{x^3}{6} - \sin(x) \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, ψ est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$.
Pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, $\psi'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos(x)$.
Par les théorèmes opératoires, ψ' est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$.
Pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, $\psi''(x) = -x + \sin(x) = -\varphi(x)$ (avec la notation de la question 1) .
On a donc le tableau suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\psi''(x)$	$-$
ψ'	0 $\searrow$
$\psi'(x)$	$-$
ψ	0 $\searrow$

Ceci prouve que, pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, $\psi(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x - \dfrac{x^3}{6} - \sin(x) \leqslant 0$.

$\boxed{\forall x \in [\,0\,,+\infty[,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)}$

(c) Soit $x \in]-\infty, 0]$.
On pose $X = -x$; ainsi, $X \in [0, +\infty[$.
Les résultats des questions précédentes s'appliquent : $X - \dfrac{X^3}{6} \leqslant \sin(X) \leqslant X$.
On transforme :

$$X - \frac{X^3}{6} \leqslant \sin(X) \leqslant X$$

$$\Leftrightarrow \quad -x - \frac{(-x)^3}{6} \leqslant \sin(-x) \leqslant -x$$

$$\Leftrightarrow \quad -x + \frac{x^3}{6} \leqslant -\sin(x) \leqslant -x$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{x^3}{6} \geqslant \sin(x) \geqslant x$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[, \ x - \frac{x^3}{6} \geqslant \sin(x) \geqslant x}$$

2. (a) Tout d'abord, par les théorèmes opératoires, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
On étudie alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

- Si $x > 0$
  $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$
  Donc $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
  Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
- Si $x > 0$
  $x - \dfrac{x^3}{6} \geqslant \sin(x) \geqslant x$
  Donc $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$
  Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

$$\boxed{\text{On peut prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$$

(b) Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\dfrac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

- Si $x > 0$.
  $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$
  Donc $-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant 0$
  Donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.
- Si $x < 0$, on raisonne de même.

Finalement, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

(c) Par les théorèmes opératoires, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Reste à étudier la continuité en 0 ; on veut donc démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{x\cos(x) - x}{x^2} + \frac{x - \sin(x)}{x^2}$$

Or :

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$ (vu à la question 2b)
- $\dfrac{x\cos(x) - x}{x^2} = \dfrac{\cos(x) - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

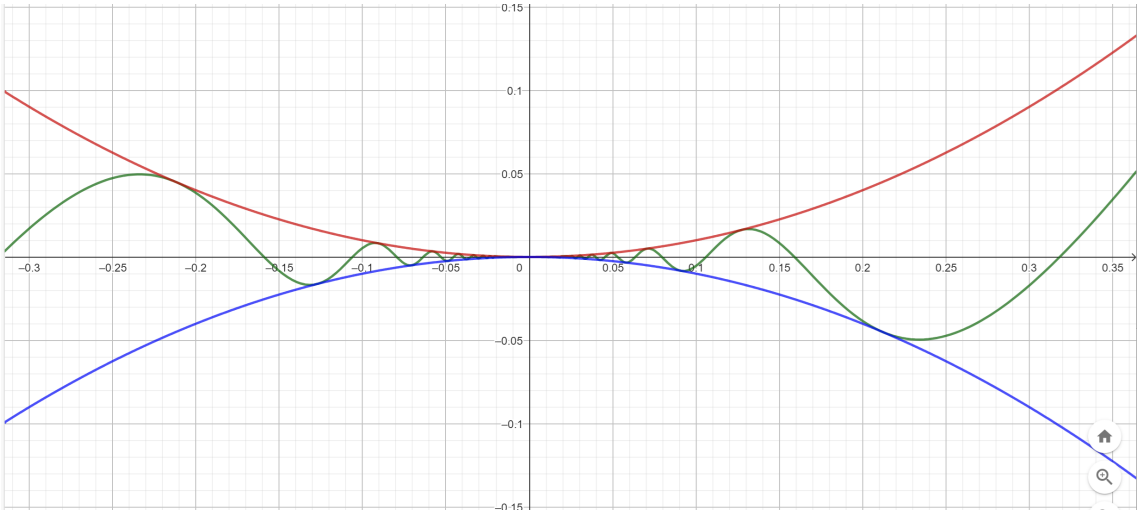
C'est ce qu'on voulait.
Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 3 (Correction rapide)

1. f est continue de façon évidente sur $\mathbb{R}^*$.
   La question revient à savoir si le prolongement par continuité a été fait correctement.
   En utilisant le théorème des gendarmes, on démontre que la réponse est oui.
2. f est dérivable de façon évidente sur $\mathbb{R}^*$.
   En 0, il faut passer par le taux d'accroissement.
   On trouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   En 0, il faut revenir à la définition de la continuité.
   On trouve que f' n'a pas de limite en 0.
   Donc la réponse est non.

   Remarque
   Très intéressant d'interpréter graphiquement l'ensemble de ces résultats. Ci-dessous :

   - En haut, la parabole d'équation $y = x^2$
   - Au milieu, la courbe représentative de f
   - En bas, la parabole d'équation $y = -x^2$



Exercice 4 (Grandes lignes)

On pose $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on trouve $f' = 0$.
Donc f est constante *sur chaque intervalle où elle est définie.*
Ainsi, f est constante sur $]-\infty, 0]$ (et $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$) et f est constante sur $[0, +\infty[$ (et $f(1) = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 5 (Correction *très* rapide)

1. Le seul problème éventuel vient de la racine qui n'est pas dérivable en 0.
   Mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. *Pas de spoil... Mais il faut trouver une expression vraiment* ***très*** *simple.*

Exercice 6 (Correction *très* rapide)

1. Voir chapitre "Trigonométrie".
   Il faut surtout faire attention aux intervalles de départ et d'arrivée.
2. On utilise le théorème de dérivation de la réciproque *en faisant bien attention à la condition de non annulation de la dérivée.*
3. Idem
4. Même méthode que l'exercice 4.

Exercice 7 (Grandes lignes)

Fait en classe.

Exercice 8 (Grandes lignes)

On note $f : X \mapsto \exp\left(\frac{1}{X}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

On fixe x au voisinage de $+\infty$.
On vérifie que le théorème des accroissements finis s'applique sur $[x, x+1]$ et on note c_x le réel associé.

On a alors : $f'(c_x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$

C'est-à-dire : $-\dfrac{1}{c_x^2}\exp\left(\dfrac{1}{c_x}\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right) - \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

D'où : $x^2\left[\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right] = \dfrac{x^2}{c_x^2}\exp\left(\dfrac{1}{c_x}\right)$

Or : $x < c_x < x+1$ donc par théorème des gendarmes, $\dfrac{x^2}{c_x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Et : si x tend vers $+\infty$, par comparaison, c_x aussi donc $\dfrac{x^2}{c_x^2}\exp\left(\dfrac{1}{c_x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right] = 1}$$

Exercice 9 (Très grandes lignes)

Exercice qui demande beaucoup d'initiatives, qui est fait pour être fait en classe... Et on ne le fera pas cette année.
L'idée est de poser :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & [0,a] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

et de lui appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 10 (Grandes lignes)

1. On raisonne par l'absurde : on suppose que $g(a) = g(b)$.
   On vérifie que le théorème de Rolle s'applique (et c'est bien le cas).
   On en déduit que g' s'annule, ce qui est faux.
   Conclusion : $g(a) \neq g(b)$.
2. • Etape 1 : brouillon
   On commence par transformer le problème pour comprendre quelle valeur de λ choisir.
   On veut appliquer le théorème de Rolle à la fonction h (par monomanie).
   On résout : $h(a) = h(b) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ (possible d'après la question 1).

   • Etape 2 : au propre
   On pose λ la valeur trouvée et h la fonction associée.
   On vérifie que le théorème de Rolle s'applique à la fonction h (et c'est bien le cas).
   Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.
   On calcule $h'(x)$ pour $x \in]a, b[$ et on en déduit que l'égalité $h'(c) = 0$ est équivalent à l'égalité voulue.
3. On fixe provisoirement $x \in]a, b[$.
   On montre qu'il existe alors $c_x \in]a, x[$ tel que : $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.
   Or, quand x tend vers a, par encadrement, c_x tend aussi vers a.
   D'où le résultat.
4. On trouve $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 11

Fait en classe.

Exercice 12 (Grandes lignes)

1. • Pour f

   → Phase de conjecture

   Pour dériver plus facilement, on écrit $f(x) = (x-1)^{-1}$ et on utilise la formule de dérivation d'une puissance.

   $f'(x) = -1 \times (x-1)^{-2}$

   $f''(x) = -1 \times (-2) \times (x-1)^{-3}$

   $f'''(x) = -1 \times (-2) \times (-3) \times (x-1)^{-4}$

   On conjecture que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, (x-1)^{-(n+1)}$

   → Preuve de la conjecture

   On raisonne par récurrence

   → Conclusion

   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, (x-1)^{-(n+1)}}$

   • Pour g

   On procède de la même façon et on démontre que :

   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ g^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, (x+1)^{-(n+1)}}$

2. Tout d'abord, on fait le lien entre h, f et g : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ h(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{x+1}$.

   On en déduit que :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ h^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\,(-1)^n\, n!\left[(x-1)^{-(n+1)} - (x+1)^{-(n+1)}\right]}$$

Exercice 13 (Correction complète)

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Tout d'abord, P est un polynôme donc P est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Phase de conjecture

  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P^{(0)}(x) &= x^n \\ P'(x) &= nx^{n-1} \\ P''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ P''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &\dots \end{aligned}$$

  Dans les écritures précédentes, il est sous-entendu que $n-3 \geqslant 0$. En effet, si $k > n$, $P^{(k)}$ est la polynôme nul.
  On conjecture finalement que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

- Preuve de la conjecture par récurrence

  - Initialisation : pour $k = 0$
    D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P^{(0)}(x) = x^n$
    D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{n!}{(n-0)!}x^{n-0} = x^n$
    La propriété est initialisée.
  - Hérédité
    On suppose qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$.
    Tout d'abord, comme $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $1 \leqslant n-k$; $P^{(k)}$ n'est donc pas un polynôme constant.
    On peut donc le dériver selon les règles de calcul habituelles.
    Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P^{(k+1)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!} \times (n-k)\, x^{n-k-1} \\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!}\, x^{n-(k+1)} \\ &= \frac{n!}{\Big(n-(k+1)\Big)!}\, x^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

    La propriété est donc héréditaire.
  - Conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}}$$

  - Pour $k > n$
    La formule précédente reste valable pour $k = n$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(n-n)!}\, x^{n-n} = n!$.
    On en déduit que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \text{ avec } n > k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P^{(k)}(x) = 0}$

Exercice 14 (Correction dans les grandes lignes)

On procède par récurrence, avec une variante. La propriété doit être vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut donc initialiser à $n = 0$. Mais on se rend compte lors de l'hérédité qu'on a aussi besoin de savoir que la propriété est vraie pour $n = 1$ pour réussir l'hérédité. On fait donc aussi l'initialisation pour $n = 1$.

- Initialisation : $n = 0$
  D'une part, $(fg)^{(0)} = fg$
  D'autre part, $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = f^{(0)} g^{(0)} = fg$
  La propriété est initialisée.
- Initialisation : $n = 1$
  D'une part, $(fg)' = f'g + fg'$ d'après le cours du chapitre "Dérivées, primitives et intégrales".
  D'autre part, $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = f^{(0)} g^{(1)} + f^{(1)} g^{(0)} = fg' + f'g$
  La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
- Hérédité
  On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
  On dérive alors :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((f^{(k)})' g^{(n-k)} + f^{(k)} (g^{(n-k)})'\right) \quad \text{(par linéarité de la dérivation et en utilisant la formule pour } n = 1)\end{aligned}$$

  On termine alors les calculs avec les mêmes étapes sur la démonstration de la formule du binôme de Newton.

Exercice 15 (Correction rapide)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin(x)$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Mais f' s'annule une infinité de fois ; en tout x de la forme $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 16 (Correction complète)

1. $\boxed{\text{La fonction ln est solution de } (E).}$
2. *Remarque : vue la formulation, la question 2 constitue l'analyse d'une analyse-synthèse.*
   (a) On pose $x = y = 1$.
   Dans ce cas : $f(xy) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$.
   Ainsi, $\boxed{f(1) = 0}$.
   (b) On fixe $x \in]0, +\infty[$. On prend alors aussi $h > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f\Big(x\,(1+\frac{h}{x})\Big) - f(x)}{h} \\
&= \frac{f(x) + f\Big(1+\frac{h}{x}\Big) - f(x)}{h} \\
&= \frac{f\Big(1+\frac{h}{x}\Big)}{h} \\
&= \frac{f\Big(1+\frac{h}{x}\Big) - f(1)}{h} \\
&= \frac{f\Big(1+\frac{h}{x}\Big)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

   Or, on sait que f est dérivable en 1.
   Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(1) \times \dfrac{1}{x}$.
   Ceci prouve que : $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et, pour tout } x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}}$.
3. *Remarque : il s'agit de maintenant de terminer l'analyse et de procéder à la synthèse.*
   - Analyse
     Soit f une fonction solution du problème.
     D'après les questions précédentes : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$.
     Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(1)\ln(x) + C$
     Or, $f(1) = 0$ donc, nécessairement $C = 0$.
     Ainsi, on obtient : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = f'(1)\ln(x)$.
   - Synthèse
     Soit f une fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & K\ln(x) \end{array}$$

     avec K une constante réelle.
     Dans ce cas :
     $\to$ f est définie sur $]0, +\infty[$
     $\to$ f est dérivable en 1
     $\to$ si $x, y \in]0, +\infty[$, alors $f(xy) = K\ln(xy) = K\Big(\ln(x) + \ln(y)\Big) = K\ln(x) + K\ln(y) = f(x) + f(y)$
     Donc f est solution du problème.
     Remarque : et, dans ce cas, en dérivant puis en évaluant en 1, on obtient $K = f'(1)$.
   - Conclusion

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} f & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & K\ln(x) \end{array} \quad , \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$