Semaine 21 - Lundi 24 mars au vendredi 28 mars

Chap 19 - Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et sous-espaces vectoriels

IV/ Dimension

1. Espaces vectoriels de dimension finie
   - Définition : espace vectoriel de dimension finie
   - Théorème : tout sev de $\mathbb{K}^n$ non réduit au vecteur nul admet une base et toutes les bases de F ont le même cardinal, appelé dimension de F et notée $\dim(F)$
2. Dimension et familles de vecteurs
   - Proposition : dans un sev $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ de dimension p ; une famille libre possède au maximum p vecteurs ; une famille libre peut être complétée en une base de F ; une famille libre qui possède p vecteurs est une base de F
   - Corollaire : dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non nuls orthogonaux forment une base ; dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux forment une base
   - Proposition : dans un sev $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ de dimension p ; une famille génératrice de F possède au minimum p vecteurs ; de toute famille génératrice de F on peut extraire une base de F ; une famille génératrice de F qui possède p vecteurs est une base de F
3. Dimension et sous-espaces vectoriels
   - Proposition : si F et G sont deux sev de $\mathbb{K}^n$ et $F \subset G$, alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$
   - Proposition : si F et G sont deux sev de $\mathbb{K}^n$ avec $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$
4. Rang d'une famille finie de vecteurs
   - Définition : rang d'une famille de vecteurs, notation $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k)$
   - Proposition : dans un sev F de dimension p, on considère une famille $(u_1, \ldots, u_k)$; $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k) \leqslant k$; $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k) \leqslant p$; $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k) = k$ ssi $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre ; $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_k) = p$ ssi $(u_1, \ldots, u_k)$ est génératrice de F
   - Proposition : le rang d'une famille de vecteurs est inchangé si on permute deux vecteurs, si on multiplie un vecteur par un scalaire non nul, si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres

Chap 20 - Dérivation

I/ Dérivabilité d'une fonction

1. Définitions
   - Définitions : dérivabilité en a, nombre dérivé, notations $f'(a)$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
   - Définitions : dérivabilité à gauche et à droite
   - Proposition : f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$
   - Définitions : dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée
2. Caractérisation
   - Définition : développement limité à l'ordre 1, notation $\mathrm{DL}_1(a)$
   - Proposition : f est dérivable en a ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ avec $a_0 = f(a)$; dans ce cas le $\mathrm{DL}_1(a)$ est $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$
   - Corollaire : si f est dérivable en a, alors f est continue en a
3. Interprétation graphique
   - Taux d'accroissement / pente de la dérivée
   - Nombre dérivé / pente de la tangente
   - Développement limité
4. Opérations
   - Somme, produit par un scalaire, produit, inverse, quotient
   - Composée
   - Réciproque
   - Exemple fondamental : arctan
5. Dérivées usuelles

II/ Théorèmes liés à la dérivabilité

1. Recherche d'extrema
   - Définitions : minimum local, maximum local, extremum local
   - Proposition : si $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$ n'est pas une extrémité de I et f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$
2. Théorème de Rolle

3. Théorème des accroissements finis
4. Lien avec la monotonie
   - Proposition : pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ; f est croissante sur I ssi f' est positive sur I ; f est décroissante sur I ssi f' est négative sur I ; f est constante sur I ssi f' est nulle sur I
   - Proposition : pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ; si f' est positive sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I

III/ Dérivées d'ordres supérieurs

1. Définitions
   - Définitions : dérivées successives
   - Définitions : classes de fonctions ; $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$
   - Proposition : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
2. Opérations
   - Somme, produit par un scalaire, produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$
   - Inverse, quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$
   - Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Informatique

Tout ce qui a été vu en Python reste au programme.

Questions de cours

1. *Sans preuve*
   Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel, la proposition qui fait le lien entre dimension et familles libres et la proposition qui fait le lien entre dimension et familles génératrices.
2. *Avec preuve*
   Soient F et G sont deux sev de $\mathbb{K}^n$. Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.
   Soient F et G sont deux sev de $\mathbb{K}^n$. Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.
3. *Avec preuve*
   La dérivabilité équivaut à l'existence d'un développement limité.
4. *Avec preuve*
   Enoncer le proposition sur la dérivée de la réciproque (sans preuve) et en déduire la dérivée de arctan (avec preuve).
5. *Sans preuve*
   Enoncer le thoérème de Rolle et le théorème des accroissements finis.