DM6 (Correction)

Exercice 1

1.
 - Par les théorèmes opératoires, f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$.
 Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, le théorème de la bijection s'applique; f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

$$\text{Or, } f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

On en déduit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bijective.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord : x est solution de (E_n) si et seulement si $f(x) = n$.

Or, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc n a un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution x_n .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On transforme :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_n \\ \Leftrightarrow f(0) &\leq f(x_n) \quad (\text{car } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow 1 &\leq n \end{aligned}$$

Or, cette dernière ligne est vraie, donc la première ligne est vraie aussi.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$f(x_n) = n$ donc $x_n = f^{-1}(n)$, et de même $x_{n+1} = f^{-1}(n+1)$.

Or, toujours d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, comme $n < n+1$, on en déduit que $f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1)$, c'est-à-dire $x_n < x_{n+1}$.

(x_n) est strictement croissante.

5. (x_n) est strictement croissante, donc par le théorème de la limite monotone, (x_n) admet une limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $x_n = f^{-1}(n)$.

Or, la fonction f^{-1} est strictement croissante et on sait aussi, toujours par le théorème de la bijection, que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ainsi, nécessairement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

Exercice 2

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in F_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = 1z \end{cases}$$

Ceci prouve que $F_1 = \text{Vect}((-1, 0, 1))$. Donc F_1 est un espace vectoriel.

De plus, comme le vecteur $(-1, 0, 1)$ est non nul, $((-1, 0, 1))$ est une base de F_1 et $\dim(F_1) = 1$.

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (1-\lambda)x + y = 0 \\ y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ (2 - (1-\lambda)^2)y - 2(1-\lambda)z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - (1-\lambda)L_1 \\ y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ (-\lambda^2 + 2\lambda + 1)y - 2(1-\lambda)z = 0 \\ (-\lambda^2 + 2\lambda + 3)y = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $-\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = -1$ ou si $\lambda = 3$:

Dans ce cas, la dernière ligne du système est $0 = 0$, le système a une infinité de solutions et $F_\lambda \neq \{\mathbf{O}_{\mathbb{R}^3}\}$

- Si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 3$:

Dans ce cas, la dernière ligne du système devient $y = 0$.

Mais, pour finir la résolution, il faut encore distinguer un cas.

→ Si $\lambda = 1$: la deuxième ligne du système devient $0 = 0$, le système a une infinité de solutions, et $F_\lambda \neq \{\mathbf{O}_{\mathbb{R}^3}\}$

→ Si $\lambda \neq 1$: le système a alors pour seule solution $x = y = z = 0$ et $F_\lambda = \{\mathbf{O}_{\mathbb{R}^3}\}$

$F_\lambda \neq \{\mathbf{O}_{\mathbb{R}^3}\}$ si et seulement si $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$.

- (b) •
- Pour $\lambda = 1$

On retrouve la question 1 ; F_1 est un espace vectoriel , $\left((-1, 0, 1) \right)$ est une base de F_1 et $\dim (F_1) = 1$.

-
- Pour $\lambda = -1$

En notant (S) le système obtenu à la fin des calculs dans la question 2b, on :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z = 1z \end{cases}$$

On en déduit que $F_{-1} = \text{Vect} \left((1, -2, 1) \right)$.

Donc F_{-1} est un espace vectoriel .

De plus, comme le vecteur $(1, -2, 1)$ est non nul, $\left((1, -2, 1) \right)$ est une base de F_{-1} et $\dim (F_{-1}) = 1$.

-
- Pour $\lambda = 3$

Toujours en notant (S) le système obtenu à la fin des calculs dans la question 2b, on :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z = z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z = 1z \end{cases}$$

On en déduit que $F_3 = \text{Vect} \left((1, 2, 1) \right)$.

Donc F_3 est un espace vectoriel .

De plus, comme le vecteur $(1, 2, 1)$ est non nul, $\left((1, 2, 1) \right)$ est une base de F_3 et $\dim (F_3) = 1$.

3. On note
- $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1)$
- ,
- $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 1)$
- ,
- $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$
- et
- $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$
- .

B est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Pour que B soit une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit donc que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ soit libre.

Soient a , b et c trois réels. On résout :

$$a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ 2b + 2c = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ 4c = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = b = a = 0.$$

Ceci prouve que la famille B est libre, et donc B est une base de $\mathbb{R}^3$.