Semaine 22 - Lundi 31 mars au vendredi 4 avril

Chap 20 - Dérivation

I/ Dérivabilité d'une fonction

1. Définitions
   - Définitions : dérivabilité en a, nombre dérivé, notations $f'(a)$ et $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$
   - Définitions : dérivabilité à gauche et à droite
   - Proposition : f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$
   - Définitions : dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée
2. Caractérisation
   - Définition : développement limité à l'ordre 1, notation $DL_1(a)$
   - Proposition : f est dérivable en a ssi f admet un $DL_1(a)$ avec $a_0 = f(a)$; dans ce cas le $DL_1(a)$ est $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$
   - Corollaire : si f est dérivable en a, alors f est continue en a
3. Interprétation graphique
   - Taux d'accroissement / pente de la dérivée
   - Nombre dérivé / pente de la tangente
   - Développement limité
4. Opérations
   - Somme, produit par un scalaire, produit, inverse, quotient
   - Composée
   - Réciproque
   - Exemple fondamental : arctan
5. Dérivées usuelles

II/ Théorèmes liés à la dérivabilité

1. Recherche d'extrema
   - Définitions : minimum local, maximum local, extremum local
   - Proposition : si $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$ n'est pas une extrémité de I et f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$
2. Théorème de Rolle
3. Théorème des accroissements finis
4. Lien avec la monotonie
   - Proposition : pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ; f est croissante sur I ssi f' est positive sur I ; f est décroissante sur I ssi f' est négative sur I ; f est constante sur I ssi f' est nulle sur I
   - Proposition : pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ; si f' est positive sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I

III/ Dérivées d'ordres supérieurs

1. Définitions
   - Définitions : dérivées successives
   - Définitions : classes de fonctions ; $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$
   - Proposition : $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$
2. Opérations
   - Somme, produit par un scalaire, produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$
   - Inverse, quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$
   - Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Chap 21 - Concepts de base des probabilités

I/ Univers et événements

1. Univers
   - Définitions : expérience aléatoire, univers
2. Evénements
   - Définitions : tribu, événements
   - Définitions : événements élémentaires, événement impossible, événement certain
   - Définition : événements incompatibles
   - Définition : système complet d'événements

II/ Loi de probabilité sur un univers fini

1. Définition
   - Définitions : loi de probabilité, probabilité d'un événement, espace probabilisé
   - Exemple fondamental : loi uniforme
2. Caractérisation par les événements élémentaires
   - Proposition : si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et si les p_k sont des éléments de $[0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors il existe une unique loi de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\omega_k) = p_k$
   - Application : simulation d'une expérience aléatoire avec Python (bibliothèque random, rd.random(), rd.randint(a,b) et rd.choice(L))
3. Lien avec les opérations
   - Proposition : contraire ; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$; $P(\emptyset) = 0$
   - Proposition : croissance ; si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$
   - Proposition : formule du crible ; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Formule des probabilités totales
   - Proposition : formule des probabilités totales (version avec des intersections)

III/ Conditionnement

1. Probabilité d'un événement sachant un autre
   - Définition : si $P(A) \neq 0$, alors $P_A(B) = P(B \,|\, A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
   - Convention : si $P(A) = 0$, alors par convention $P(A)P_A(B) = 0$
   - Lien avec les arbres de probabilités : un arbre peut aider à la réflexion mais n'a pas valeur de démonstration
2. Loi de probabilité conditionnelle
   - Proposition : si $P(A) \neq 0$, alors l'application $P_A : B \mapsto P_A(B)$ est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$
3. Formule des probabilités totales
   - Proposition : formule des probabilités totales (version avec des probabilités conditionnelles)
4. Formule de Bayes
   - Proposition : formule de Bayes
5. Formule des probabilités composées
   - Proposition : formule des probabilités composées

IV/ Indépendance

1. Pour deux événements
   - Définition : indépendance de deux événements
   - Caractérisation : si $P(A) \neq 0$, alors : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$
   - Proposition : si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ aussi, $\overline{A}$ et B aussi, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi
   - Définition : indépendance conditionnellement à un événement
2. Pour n événements
   - Définitions : événements deux à deux indépendants, événements mutuellement indépendants
   - Proposition : on a encore une famille d'événements mutuellement indépendants en remplaçant un nombre quelconque de ces événements par leurs complémentaires

Questions de cours

1. *Avec preuve*
   La dérivabilité équivaut à l'existence d'un développement limité.
2. *Avec preuve*
   Enoncer le proposition sur la dérivée de la réciproque (sans preuve) et en déduire la dérivée de arctan (avec preuve).
3. *Sans preuve*
   Enoncer le thoérème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
4. *Sans preuve*
   Donner la définition d'un système complet d'événements et énoncer la formule des probabilités totales (deux versions).
5. *Sans preuve*
   Enoncer la formule de Bayes et la formule des probabilités composées.