

Concepts de base des probabilités - Correction**Exercice 1 (Correction complète)**

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\&= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap C \cap B \cap C) \\&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

On retrouve les mêmes calculs que dans un exercice similaire sur les cardinaux.

Exercice 2 (Correction complète)

On modélise l'exercice en notant :

- $E = \llbracket 0, 9 \rrbracket$
- $\Omega = E^4$ l'univers
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu associée
- P la loi uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$

1. Pour avoir un code formé de 4 chiffres distincts :

- on choisit le premier chiffre : 10 possibilités
- on choisit le deuxième chiffre : 9 possibilités
- on choisit le troisième chiffre : 8 possibilités
- on choisit le dernier chiffre : 7 possibilités

Au total :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $P(A) = 0,504$

2. Pour avoir un code qui contient une paire et une seule :

- on choisit le chiffre de la paire : 10 possibilités
- on choisit les emplacements des deux chiffres de la paire : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités
- on choisit le chiffre pour le premier emplacement libre : 9 possibilités
- on choisit le dernier chiffre manquant : 8 possibilités

Au total :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{10 \times 6 \times 9 \times 8}{10^4} \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $P(B) = 0,432$

3. Pour avoir un code formé de deux paires distinctes :

- on choisit simultanément les valeurs des deux paires : $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 5 \times 9$ possibilités
- on choisit les emplacements pour les deux chiffres de la paire de plus grande valeur : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités
- on n'a alors plus de choix à faire

Au total :

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{5 \times 9 \times 6}{10^4} \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $P(C) = 0,027$

Exercice 3

Sera fait en classe.

Exercice 4 (Correction complète)

1. Python

```

1 import random as rd
2
3 def liste_resultats(n):
4     L = []
5     for k in range(n):
6         de = rd.randint(1,6)
7         L.append(de)
8     return L
9
10 def presence_6(n):
11     for k in range(n):
12         de = rd.randint(1,6)
13         if de == 6:
14             return True
15     return False
16
17 def estimation(n,N=10000):
18     S = 0
19     for k in range(N):
20         if presence_6(n)==True:
21             S+=1
22     return S/N

```

2. On procède par dénombrement.

On pose :

- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Omega = E^n$
- P : loi de probabilité uniforme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n : "obtenir au moins un 6 en n lancers".

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Exercice 5 (Correction très rapide)

On définit les événements M et A .

L'énoncé revient à calculer $P_A(M)$.

On applique la formule de Bayes au SCE $(M, \overline{M})$.

On trouve $\frac{0,45 \times 0,025}{0,45 \times 0,025 + 0,55 \times 0,016}$ soit environ 0,561.

Exercice 6 (Correction complète)

On définit les événements :

- M : "la personne est malade"
- T : "le test est positif"

On applique la formule de Bayes avec le système complet d'événements $(M, \overline{M})$:

$$P(M|T) = \frac{P(M) P(T|M)}{P(M) P(T|M) + P(\overline{M}) P(T|\overline{M})}$$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{1000} \times \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} \times \frac{2}{1000}}$$

$$= \frac{990}{\frac{1000 \times 1000}{990 + 1998}}$$

$$= \frac{990}{2988}$$

La probabilité cherchée est $\frac{990}{2988}$.
--

Soit environ 0,331.

Exercice 7

Fait en classe.

Exercice 8

Fait en classe.

Exercice 9 (Correction complète)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

- U_i : "on choisit l'urne n°i"
- B : "on tire une boule blanche"

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U_1, \dots, U_n)$:

$$P(B) = P(U_1) P(B | U_1) + \dots + P(U_n) P(B | U_n)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{n}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi, $\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(B) = \frac{n+1}{2n}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On conserve les notations de la question précédente.

On applique la formule de Bayes avec le système complet d'événements $(U_1, \dots, U_n)$:

$$P(U_n | B) = \frac{P(U_n) P(B | U_n)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \times \frac{n}{n}}{\frac{n+1}{2n}}$$

$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(U_n | B) = \frac{2}{n+1}$.

Exercice 10 (Une rédaction complète)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On fixe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Rédaction 1 : avec des événements

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit T_i : "la paille la plus courte est tirée au $i^{\text{ème}}$ tour".

$$P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}} \cap T_k) \neq 0.$$

On utilise la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}} \cap T_k) &= P(\overline{T_1}) \\ &\quad \times P(\overline{T_2} | \overline{T_1}) \\ &\quad \times \dots \\ &\quad \times P(\overline{T_{k-1}} | \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-2}}) \\ &\quad \times P(T_k | \overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- Rédaction 2 : avec du dénombrement

Exercice 11 (Correction complète)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, S_n : "obtenir un 6 au $k^{\text{ème}}$ lancer".

L'exercice revient à calculer :

$$\begin{aligned} P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n) &= P(\overline{S_1}) P(\overline{S_2}) \dots P(\overline{S_{n-1}}) P(S_n) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La probabilité cherchée est $\frac{5^{n-1}}{6^n}$.

Remarque : l'utilisation de l'argument d'indépendance permet de rédiger avec des événements et d'éviter totalement la rédaction avec du dénombrement.

Exercice 12 (Correction complète)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, T_k : "le joueur réussit à lancer la pièce sur la tranche au $k^{\text{ème}}$ essai.

On a alors :

$$\begin{aligned} p_n &= P(T_1 \cup \dots \cup T_n) \\ &= 1 - P(\overline{T_1 \cup \dots \cup T_n}) \\ &= 1 - P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_n}) \\ &= 1 - P(\overline{T_1}) \dots P(\overline{T_n}) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$p_n = 1 - \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\text{Or : } \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \text{ donc } n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1.$$

$$\text{D'où, en composant les limites, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1 - e^{-1}}.$$

Application numérique : $1 - e^{-1} \simeq 0,63$.

Exercice 13 (Dans les grandes lignes)

Cet exercice vise à illustrer la différence entre événements deux à deux indépendants et événements mutuellement indépendants.

- $P(A), P(B), P(C)$

$$\text{On trouve : } P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4} \text{ et } P(C) = \frac{3}{4}$$

- Deux à deux indépendants ?

On trouve :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

Donc oui.

- Mutuellement indépendant ?

$$\text{On trouve : } P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Donc non

Exercice 14 (Correction en partie détaillée)

Pour toute la durée de l'exercice, on note (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) :

- A_k : "A gagne lors de son $k^{\text{ème}}$ lancer"
- B_k : "B gagne lors de son $k^{\text{ème}}$ lancer".

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On utilise la formule des probabilités composées (possible car $P(A_n) \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
 P(A_n) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{B_{n-1}} \cap A_n) \\
 &= P(\overline{A_1}) \\
 &\quad \times P(\overline{B_1} | \overline{A_1}) \\
 &\quad \times \dots \\
 &\quad \times P(\overline{A_{n-1}} | \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-2}}) \\
 &\quad \times P(\overline{B_{n-1}} | \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}) \\
 &\quad \times P(A_n | \overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap \overline{B_{n-1}}) \\
 &= \underbrace{(1-p) \times p \times \dots \times (1-p) \times p}_{n-1 \text{ fois}} \times p
 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que A_n gagne lors de son $n^{\text{ème}}$ lancer vaut $(1-p)^{n-1}p^n$.

(b) • Résultat préliminaire

On note $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur $]0, 1[$.

On étudie les variations de f et on trouve :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f	0	$\frac{1}{4}$	0

• Réponse à la question

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note G_n l'événement : "A gagne au maximum en n lancers".

$$P(G_n) = P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= P(A_1) + \dots + P(A_n) \quad (\text{événements incompatibles})$$

$$= \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1}p^k$$

$$= \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^n \left((p(1-p)) \right)^k \quad (\text{possible car } p \neq 1)$$

$$= \frac{1}{1-p} \times p(1-p) \times \frac{1 - \left(p(1-p) \right)^n}{1 - \left(p(1-p) \right)} \quad (\text{possible car } p(1-p) \neq 1 \text{ d'après le résultat préliminaire})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p \times \frac{1 - \left(p(1-p) \right)^n}{1 - \left(p(1-p) \right)}$.

(c) Toujours d'après le résultat préliminaire de la question 1b, on sait que $-1 < p(1-p) < p$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(p(1-p) \right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{p}{1 - \left(p(1-p) \right)}.$$

On interprète par : $\boxed{\text{la probabilité que A gagne vaut } \frac{p}{1 - (p(1-p))}}.$

2. On commence par déterminer la probabilité que B gagne, par un raisonnement analogue à la question 1.

Tout d'abord, pour la probabilité que B gagne lors de son $k^{\text{ème}}$ lancer, on trouve : $p^{k-1}(1-p)^{k+1}$.

Ensuite, pour la probabilité que B gagne au maximum en n lancers, on trouve : $(1-p)^2 \times \frac{1 - (p(1-p))^n}{1 - (p(1-p))}$.

Enfin, pour la probabilité que B gagne, on trouve : $\frac{(1-p)^2}{1 - (p(1-p))}$.

On constate que la somme de la probabilité que A gagne et de la probabilité que B gagne vaut 1.

Donc $\boxed{\text{la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais vaut 0}}$.

3. Il s'agit de résoudre $\frac{p}{1 - (p(1-p))} = \frac{(1-p)^2}{1 - (p(1-p))}$.

On trouve pour solutions :

- $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ qu'on exclut parce que strictement supérieur à 1.
- $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ qui appartient à $[0, 1]$ et qui est donc la solution de la question.

Exercice 15 (Correction rapide)

Modélisation

On définit les événements :

- V_1 : "avoir choisi au début la porte cachant la voiture"
- V_2 : "avoir choisi à la fin la porte cachant la voiture"

Il s'agit alors de calculer $P(V_2)$ avec deux stratégies différentes.

Dans les deux cas, on utilise la formule des probabilités totales avec le S.C.E. $(V_1, \overline{V_1})$.

Si on change de porte : on trouve $\frac{2}{3}$

Si on ne change pas de porte : on trouve $\frac{1}{3}$

Conclusion : on change de porte.

Exercice 16 (Correction en partie complète)

1. C'est le DM.
2. C'est le DM.
3. C'est le DM.
4. Stratégie 3

(a) $\boxed{P(F_1) = \frac{2p+1}{4} \text{ et } P(F_2) = \frac{4p^2+3}{8}}$ Aux deux premiers lancers, la stratégie 3 est identique à la 2.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(E_n, \overline{E_n})$.
On obtient :

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P(E_{n+1}|E_n) + P(\overline{E_n}) \times P(E_{n+1}|\overline{E_n})$$

Or, dans cette stratégie, l'événement $E_{n+1} \cap E_n$ est égal à l'événement $E_n \cap F_n$. D'où :

$$P(E_{n+1}|E_n) = \frac{P(E_{n+1} \cap E_n)}{P(E_n)} = \frac{P(E_n \cap F_n)}{P(E_n)} = P(F_n|E_n) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{De même, } P(E_{n+1}|\overline{E_n}) = P(\overline{F_n}|\overline{E_n}) = 1 - p$$

D'où, finalement :

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times \frac{1}{2} + (1 - P(E_n)) \times (1 - p) = \left(\frac{1}{2} - (1 - p)\right)P(E_n) + (1 - p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)P(E_n) + (1 - p).$$

On pose donc $a = p - \frac{1}{2}$ et $b = 1 - p$. a et b conviennent car :

- d'après les calculs précédents, on a bien l'égalité voulue.
- a et b sont bien définis indépendamment de n
- par hypothèse, $p > \frac{1}{2}$ donc on a bien $a \in]0, 1[$

$$\boxed{\text{Pour } a = p - \frac{1}{2} \in]0, 1[\text{ et } b = 1 - p \in \mathbb{R}, \text{ on a bien, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(E_{n+1}) = aP(E_n) + b.}$$

- (c) La suite de terme général $P(E_n)$ est donc arithmético-géométrique.

Le point fixe est $\frac{b}{1-a}$ (possible car $a \neq 1$). La suite de terme général $v_n = P(E_n) - \frac{b}{1-a}$ est alors une suite géométrique de premier terme $v_1 = P(E_1) - \frac{b}{1-a} = \frac{1}{2} - \frac{b}{1-a}$ et de raison a .

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : v_n = a^{n-1}v_1 = a^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a}\right) \text{ et } P(E_n) = a^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 1, P(E_n) = a^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$$

- (d) Soit $n \geq 1$. Avant toute chose, on calcule : $\frac{b}{1-a} = \frac{1-p}{1-p+\frac{1}{2}} = \frac{1-p}{\frac{3}{2}-p} = \frac{2(1-p)}{3-2p}$

On injecte le résultat de la question précédente dans la formule de la question 1. Il vient :

$$\begin{aligned} P(F_n) &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right) \left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{2(1-p)}{3-2p}\right) + \frac{2(1-p)}{3-2p} \right] \\ &= p - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^n \times \frac{3-2p-4(1-p)}{2(3-2p)} + \frac{1-2p}{2} \times \frac{2(1-p)}{3-2p} \\ &= p - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^n \times \frac{2p-1}{2(3-2p)} + \frac{(1-2p)(1-p)}{3-2p} \\ &= \frac{1}{3-2p} \left[p(3-2p) + (1-2p)(1-p) - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{3-2p} \left[1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a bien $P(F_n) = \frac{1}{3-2p} \left[1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right]$
--

- (e) On commence par calculer, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-2p} \left[1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right] - \frac{4p^2+3}{8} &= \frac{1}{8(3-2p)} \left[8 - 8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} - (4p^2+3)(3-2p) \right] \\ &= \frac{1}{8(3-2p)} \left[8p^3 - 12p^2 + 6p - 1 - 8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{8(3-2p)} \left[(2p-1)^3 - 2^3 \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{(2p-1)^3}{8(3-2p)} \left[1 - \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] \end{aligned}$$

Or, $1 > p > \frac{1}{2}$ donc : $2p-1 > 0$, $3-2p \geq 1 > 0$ et $\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-2} < 1$ pour tout $n-2 \geq 1$ c'est-à-dire pour tout $n \geq 3$.

Aux deux premiers lancers, les stratégies 2 et 3 sont identiques.

A partir troisième lancer, la stratégie 3 est meilleure que la stratégie 2.
