Développements limités et études de fonctions réelles

Calculs de DL

Exercice 1

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $(\cos x)\, e^x$
2. $DL_2(0)$ de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
3. $DL_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $\sin(x)$
4. $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Exercice 2

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin(x))$
2. $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{e^x}$
3. $DL_4(0)$ de $x\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)$
4. $DL_2(2)$ de $\dfrac{1}{x}$

Exercice 3 - tan (1)

Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction tangente en utilisant l'égalité $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Exercice 4 - tan (2)

Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction tangente à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Exercice 5 - arctan

Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction arctan.
On pourra utiliser la dérivée de arctan.

Exercice 6 - arcsin

1. Rappeler la définition de arcsin.
2. Démontrer que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. En déduire le $DL_5(0)$ de arcsin.

Limites et équivalents

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan(x)-\tan(2x)}{x(1-\cos(3x))}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$

Exercice 8

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

1. $a(x) = \tan(x) - \arctan(x)$ en 0
2. $b(x) = e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}$ en 0
3. $c(x) = e^x - \cos(x) - x$ en 0
4. $d(x) = \ln(\cos(x))$ en 0
5. $e(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right) - \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$

Etude de fonctions

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \ln(x)$$
On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le $DL_3(1)$ de f.
2. En déduire l'équation de la tangente Δ à C au point $A(1, \frac{1}{2})$ et la position de C par rapport à Δ au voisinage de A.

Exercice 10

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier que f y est dérivable.
2. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. La notation f désignera désormais la fonction ainsi prolongée en 0. Quelle est alors la valeur de $f(0)$?
3. Montrer que f admet le $DL_2(0)$ suivant :
$f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{24}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$.
4. (a) En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et étudier sa position par rapport à la courbe au voisinage de ce point.

Exercice 11

Etudier au voisinage de 0 la fonction :

$$f : \left]-1,+\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 12

Etudier au voisinage de $+\infty$ la fonction :

$$f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 13

Etudier au voisinage de 0 la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{xe^x}{\ln(1+x)}$$

Approfondissement

Exercice 14

Soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Montrer que, si f est paire, alors la partie régulière de ce DL n'a que des monômes de degrés pairs.
2. Montrer que, si f est impaire, alors la partie régulière de ce DL n'a que des monômes de degrés impairs.

Exercice 15

Dans cet exercice, on pourra admettre les résultats de l'exercice 14.

On définit la fonction f par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto xe^{x^2}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} possède un développement limité d'ordre 5 en 0.
3. Montrer que ce développement limité est de la forme $f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)$
4. Calculer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b et c.
5. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 16

Dans cet exercice, on pourra admettre les résultats de l'exercice 14.

Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction tangente en utilisant l'égalité $\tan' = 1 + \tan^2$.

Exercice 17

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^5$ au voisinage de 0 telle que : $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ et $f^{(4)}(0) > 0$.
   Etudier l'existence d'un extremum local de f en 0.
2. Reprendre la question précédente avec la condition $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$ et $f^{(5)}(0) > 0$.