Fiche n° 25. Développements limités

Réponses

25.1 a) .... $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

25.1 b) .... $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

25.1 c) .... $-\dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.1 d) .... $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.2 a) .... $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

25.2 b) .... $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.2 c) .... $\mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \dfrac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

25.2 d) .... $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$

25.3 a) .... $-\dfrac{1}{2}$

25.3 b) .... $\dfrac{2}{3}$

25.3 c) 1

25.3 d) .... $-\dfrac{1}{2}$

25.3 e) .... -1

25.3 f) 0

25.4 a) .... $-\dfrac{1}{2x}$

25.4 b) .... $\dfrac{1}{x^2}$

25.4 c) .... $-\ln(x)$

25.4 d) .... $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x$

Corrigés

25.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 3 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

25.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 2. Observez que le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{x+1}$

suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(1 - x + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3).$$

25.1 c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cos(x)-1) = \left(x + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)$.

25.1 d) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x\sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

25.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 3) et de l'exponentielle (à l'ordre 2), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)$.

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)$.

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$.

25.2 b) On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)$$
$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \underset{u\to1}{\mathrm{o}}(u^2)$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4).\end{aligned}$$

25.2 c) On a : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $\mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^3)\right)$.

D'où : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}(1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3) = \mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \frac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

25.2 d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$.

Or $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\frac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t)$.

D'où $g(t) = \left(-t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \frac{3}{2}t^2 + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t^2)$

et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right)$.

25.3 a) $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \dfrac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right) - x}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$

25.3 b) $\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right)}{x\left(\frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}}$

25.3 c) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = 0$

or $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right)$ donc la limite vaut 1.

25.3 d) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)} = \dfrac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x\times x}$

25.3 e) En posant $h = x-1$, $\dfrac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{2}h^2}{\frac{1}{2}h^2}$

25.3 f) $\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}\right) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\to} 0$

25.4 a) On a :

$$\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-(e^x-1)}{x^2(e^x-1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$$

25.4 b) $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$

25.4 c) On a : $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) = -\ln(x) + x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x) + x\left(\dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{x})\right) \sim -\ln(x)$.

25.4 d) On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\ &= e^x e^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}e^x\end{aligned}$$
