

DM7 - Pour le jeudi 3 avril**Exercice**

On dispose de deux pièces indiscernables. L'une est équilibrée et l'autre non. La pièce non équilibrée donne "face" avec une probabilité $p > \frac{1}{2}$.

On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer.

Le but de cet exercice est d'étudier plusieurs stratégies afin de trouver celle qui a la plus de chance d'obtenir "face" à chaque lancer.

Pour cela, on note pour chaque tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- E_n l'événement : "on choisit la pièce équilibrée au $n^{\text{ème}}$ lancer"
- F_n l'événement : "on obtient "face" au $n^{\text{ème}}$ lancer"

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(F_n)$ en fonction de p et $P(E_n)$.

2. Stratégie 1

A chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(F_n) = \frac{2p+1}{4}$.

3. Stratégie 2

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.

Si on obtient "face", on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.

(a) Donner l'expression de $P(F_1)$ sans justification.

(b) Soit $n \geq 2$. Déterminer les probabilités conditionnelles $P(E_n|E_1)$ et $P(E_n|\overline{E_1})$ puis en déduire $P(E_n)$.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $P(F_n) = \frac{4p^2+3}{8}$.

4. Comparer les stratégies 1 et 2.