# Devoir Surveillé n°6

**Samedi 29 mars 2025 - Durée : 2h30**

*L'usage de la calculatrice est interdit.*
*Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.*
*Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.*
*Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.*

## Exercice 1

Pour cet exercice, on se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On définit par ailleurs $P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \}$.

1. Justifier que $P$ est un espace vectoriel et déterminer une base de $P$.
   Pour la suite, on notera $u_1$ et $u_2$ les deux vecteurs de cette base.
2. Déterminer les coordonnées de $e_1'$, le projeté orthogonal de $e_1$ sur $P$.
   On rappelle que $e_1'$ est l'unique vecteur de $P$ qui vérifie : $e_1 - e_1'$ est normal à $P$.
3. On note $u_3$ un vecteur non nul normal à $P$ quelconque.
   Démontrer que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

## Exercice 2

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $F_\lambda = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 3y - 3z = \lambda x \text{ et } -3x - y + 3z = \lambda y \text{ et } 3x + 3y - z = \lambda z \right\}$.

1. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $F_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
2. Pour chacune des valeurs de $\lambda$ trouvées à la question précédente, déterminer une base et la dimension de $F_\lambda$.

## Exercice 3

On définit la fonction $f$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\arctan(x)}{x} \end{array}$$

On admettra l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

1. Justifier que $f$ est paire et que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Justifier que l'on peut prolonger $f$ par continuité en 0.
3. On continue de noter $f$ la fonction ainsi prolongée.
   $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ?

## Exercice 4

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - \ln(x)}$ où $x$ désigne une variable réelle.

On note $C$ la représentation graphique de $f$.

Pour cet exercice, les programmes sont à rédiger en langage Python.

On suppose que le fichier Python débute par l'importation du module numpy et du module matplotlib.pyplot de la façon suivante :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

La fonction mathématique ln s'obtient alors avec la commande Python **np.log** .

1. (a) Démontrer que, pour tout $x \in ]\,0\,,\,+\infty\,[\,,\ \ln(x) \leqslant x - 1$ .
   (b) Déterminer l'ensemble de définition $D$ de $f$.
2. Justifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $D$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement.
4. Justifier que l'on peut prolonger $f$ par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

   Pour la suite de l'exercice, on continuera de noter $f$ la fonction ainsi prolongée.

5. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x)$.
   *On pourra poser* $X = \dfrac{1}{x}$ .
   (b) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0 et interpréter graphiquement.
6. Dresser le tableau de signes de $f'$ et de variations de $f$. On y fera apparaître les limites de $f$.
7. (a) Tracer la représentation graphique de la fonction $f$.
   On y fera apparaître les résultats de la question 3 et de la question 5b.
   (b) Ecrire une fonction Python **graphique** qui prend en argument deux réels $a$ et $b$ avec $0 < a < b$ et $b - a < 100$ et qui affiche la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a, b]$.
8. (a) Combien l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet-elle de solution(s) sur $D$ ? Justifier.
   (b) On note $c$ l'unique solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
   Ecrire une fonction Python **solution** qui prend en argument un réel $e$ et qui renvoie deux réels $a$ et $b$ tels que $1 \leqslant a < c < b \leqslant 4$ et $b - a < e$ .
   *Pour cette question, on pourra admettre que* $f(4) \simeq 0,38$ .