Nom : ....

Interrogation 12 - Mercredi 2 avril 2025

Ev $\mathbb{K}^n$ et sev

Dans toute cette rubrique, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Si $F = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, alors $\dim(F) =$ ......
   (b) Sinon, donner la définition de $\dim(F)$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ avec $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. On note $p = \dim(F)$.
   (a) Toute famille libre de F a .... vecteurs.
   (b) Toute famille libre de F qui possède p vecteurs est ....

3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ avec $F \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. On note $p = \dim(F)$.
   (a) Toute famille génératrice de F possède .... vecteurs.
   (b) Toute famille génératrice de F qui possède p vecteurs est ....

4. Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
   Par définition, le rang de la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est :

   $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) =$ ....

5. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ avec $\dim(F) = p$.
   Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de F.
   (a) Donner la caractérisation de la liberté de la famille $(u_1, \dots, u_k)$ par son rang :
   (b) Donner la caractérisation du fait que la famille $(u_1, \dots, u_k)$ soit génératrice de F par son rang :

Dérivation

Dans toute cette section, on considère uniquement des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
   Par définition, f est dérivable en a si et seulement si :

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
   Donner la caractérisation de "f est dérivable en a" par un développement limité.

3. Enoncer la proposition reliant continuité et dérivabilité d'une fonction en un point.

4. Enoncer la proposition de dérivation de la réciproque.

5. (a) $\forall x \in \ldots\ldots\ldots$, $\arctan'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   (b) Soit u une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   $\Big(\arctan(u)\Big)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Compléter l'énoncé du théorème de Rolle.
   Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

   $$\text{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f \text{ est dérivable sur } \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

   Alors :

7. Donner la définition de "la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle I".

Concepts de base des probabilités

Dans toute cette partie, Ω désigne un univers fini non vide et $\mathcal{T}$ sa tribu.

1. Soient A et B deux événements.
   Par définition, A et B sont incompatibles

   si et seulement si . . . .

2. Donner la définition d'un système complet d'événements.

3. Donner la définition d'une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

4. La loi uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est définie par :

   Pour toute les questions suivantes, P désigne une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

5. Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
   Donner les deux notations et la formule de définition de "probabilité de B sachant A" :

6. Enoncer la proposition relative à la formule des probabilités totales, en donnant les deux formules.

7. Enoncer la proposition relative à la formule des probabilités composées.

8. Soient A et B deux événements.
   Par définition, A et B sont indépendants

   si et seulement si . . . .