Semaine 23 - Lundi 28 avril au vendredi 2 mai

Chap 21 - Concepts de base des probabilités

I/ Univers et événements

1. Univers
   - Définitions : expérience aléatoire, univers
2. Evénements
   - Définitions : tribu, événements
   - Définitions : événements élémentaires, événement impossible, événement certain
   - Définition : événements incompatibles
   - Définition : système complet d'événements

II/ Loi de probabilité sur un univers fini

1. Définition
   - Définitions : loi de probabilité, probabilité d'un événement, espace probabilisé
   - Exemple fondamental : loi uniforme
2. Caractérisation par les événements élémentaires
   - Proposition : si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et si les p_k sont des éléments de $[0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, alors il existe une unique loi de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(\omega_k) = p_k$
   - Application : simulation d'une expérience aléatoire avec Python (bibliothèque random, rd.random(), rd.randint(a,b) et rd.choice(L))
3. Lien avec les opérations
   - Proposition : contraire ; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$; $P(\emptyset) = 0$
   - Proposition : croissance ; si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$
   - Proposition : formule du crible ; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Formule des probabilités totales
   - Proposition : formule des probabilités totales (version avec des intersections)

III/ Conditionnement

1. Probabilité d'un événement sachant un autre
   - Définition : si $P(A) \neq 0$, alors $P_A(B) = P(B \,|\, A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
   - Convention : si $P(A) = 0$, alors par convention $P(A)P_A(B) = 0$
   - Lien avec les arbres de probabilités : un arbre peut aider à la réflexion mais n'a pas valeur de démonstration
2. Loi de probabilité conditionnelle
   - Proposition : si $P(A) \neq 0$, alors l'application $P_A : B \mapsto P_A(B)$ est une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$
3. Formule des probabilités totales
   - Proposition : formule des probabilités totales (version avec des probabilités conditionnelles)
4. Formule de Bayes
   - Proposition : formule de Bayes
5. Formule des probabilités composées
   - Proposition : formule des probabilités composées

IV/ Indépendance

1. Pour deux événements
   - Définition : indépendance de deux événements
   - Caractérisation : si $P(A) \neq 0$, alors : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$
   - Proposition : si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ aussi, $\overline{A}$ et B aussi, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ aussi
   - Définition : indépendance conditionnellement à un événement
2. Pour n événements
   - Définitions : événements deux à deux indépendants, événements mutuellement indépendants
   - Proposition : on a encore une famille d'événements mutuellement indépendants en remplaçant un nombre quelconque de ces événements par leurs complémentaires

Chap 22 - DL et études de fonctions réelles

I/ Négligeabilité

- Définition : fonction négligeable devant x^n au voisinage de 0
- Propriétés : si $n < p$, alors x^p est négligeable devant x^n ; si f est négligeable devant x^n alors f est négligeable devant x^n ; la somme de deux fonctions négligeables devant x^n est négligeable devant x^n

II/ Développements limités

1. Définition
   - Définition : développement limité à l'ordre n en 0
   - Définitions : développement limité à l'ordre n en a, en $+\infty$, en $-\infty$
   - Remarque : dans la pratique, pour obtenir un DL, on se ramène toujours à un $\mathrm{DL}(0)$ via un changement de variable
2. Unicité
   - Proposition : Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors ce DL est unique
3. Existence
   - Proposition : Formule de Taylor-Young
4. DL usuels
   - Proposition : $\mathrm{DL}_n(0)$ de e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$ et $\ln(1+x)$
5. Opérations sur les DL
   - Proposition : troncature
   - Propositions : somme, produit par un scalaire, produit
   - Proposition : intégration
   - Proposition : composition

III/ Applications

1. Limites et équivalents
2. Etude locale en 0
   - Prolongement par continuité
   - Dérivabilité
   - Tangente
   - Position relative courbe/tangente
3. Etude asymptotique
   - Asymptote horizontale
   - Branche parabolique de direction (Oy), ou de direction (Ox), ou de direction la droite d'équation $y = ax$
   - Asymptote oblique

Questions de cours

1. *Sans preuve*
   Donner la définition d'une loi de probabilité et énoncer la caractérisation par les événements élémentaires.
2. *Sans preuve*
   Donner la définition d'un système complet d'événements et énoncer la formule des probabilités totales (deux versions).
3. *Sans preuve*
   Enoncer la formule de Bayes et la formule des probabilités composées.
4. *Avec preuve*
   Enoncer (sans preuve) la formule de Taylor-Young et en déduire (avec preuve) les formules suivantes :
   - $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp ($n \in \mathbb{N}$)
   - $\mathrm{DL}_3(0)$ et $\mathrm{DL}_4(0)$ de cos
   - $\mathrm{DL}_3(0)$ et $\mathrm{DL}_4(0)$ de sin
5. *Avec preuve*
   Enoncer (sans preuve) la formule de Taylor-Young et en déduire (avec preuve) les formules suivantes :
   - $\mathrm{DL}_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$ ($n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$)
   - $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$
   - $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+x}$