Développements limités et études de fonctions (Correction)

Exercice 1 (Correction rapide)

Tous calculs faits, on trouve :

1. $(\cos x)e^x = 1 + x - \dfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
2. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1 + \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
3. Soit x au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$.

   On pose $X = x - \dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sin(X)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(X)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(X) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(X)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(X - \frac{X^3}{3!} + o_{X\to 0}(X^3)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{X^2}{2} + o_{X\to 0}(X^3)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{4}X^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}X^3 + o_{X\to 0}(X^3)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

4. $\cos\Big(\ln(x)\Big) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\big((x-1)^3\big)$

Exercice 2 (Correction rapide)

Tous calculs faits, on trouve :

1. $x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
2. Stratégie 1 : on commence par écrire le DL de e^x, puis on compose avec celui de $\dfrac{1}{1+X}$.

   Stratégie 2 : on pense à écrire $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

   On trouve : $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
3. $2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$
4. On fait le changement de variable $X = x - 2$.

   Il faut aussi penser à écrire $\dfrac{1}{2+X} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\frac{X}{2}}$

   On trouve $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2 + \underset{x\to 2}{o}\Big((x-2)^2\Big)$

Exercice 3 (Grandes lignes)

Soit x au voisinage de 0.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)}$$

Et on composer avec le DL de $\dfrac{1}{1+X}$.

On trouve :

$$\boxed{\text{Le } DL_3(0) \text{ de tan est : } \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)}$$

Exercice 4 (Correction complète)

Soit x au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor-Young : $\tan(x) = \tan(0) + \tan'(0)\,x + \dfrac{\tan''(0)}{2}\,x^2 + \dfrac{\tan^{(3)}(0)}{3\,!}\,x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$

Or :

$$\tan(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) & \tan'(0) = 1 \\
\tan''(x) &= 2\,\tan'(x)\,\tan(x) \\
&= 2\,(\tan^2(x)+1)\,\tan(x) \\
&= 2\tan^3(x) + 2\tan(x) & \tan''(0) = 0 \\
\tan^{(3)}(x) &= 6\,\tan'(x)\,\tan^2(x) + 2\,\tan'(x) \\
&= 6\,(1+\tan^2(x))\,\tan^2(x) + 2\,(1+\tan^2(x)) \\
&= 6\tan^4(x) + 8\tan^2(x) + 2 & \tan^{(3)}(0) = 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le } DL_3(0) \text{ de tan est : } \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)}$$

Exercice 5

Fait en classe.

Exercice 6 (Correction complète)

1. On considère la fonction sin : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.

   La fonction sin ainsi définie est continue strictement croissante sur son ensemble de définition $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Ainsi, d'après le théorème de la bijection, sin est bijective de I dans $\sin(I) = [\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)] = [-1, 1]$.

   $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est sa réciproque.

2. sin est dérivable sur I.
   De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.

   Donc d'après le théorème de dérivabilité de la réciproque, arcsin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\cos(\,\arcsin(x)\,)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\,\arcsin(x)\,)}} \quad \textbf{(*)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

   A la ligne **(*)**, on a utilisé :

   - $\cos^2(\,\arcsin(x)\,) = 1 - \sin^2(\,\arcsin(x)\,)$
   - $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos^2(\,\arcsin(x)\,) > 0$

3. Soit x au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \left(1 - x^2\right)^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

   D'où, en intégrant et en utilisant le fait que $\arcsin(0) = 0$:

   $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$

Exercice 7 (Correction rapide)

1. Initialement, FI "$\frac{0}{0}$".
   Soit x au voisinage de 0.
   $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{1}{x}\left[\ \left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o_{x\to 0}(x^3)\right)\ -\ \left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o_{x\to 0}(x^3)\right)\ \right] \\ &= \frac{1}{x}\left(\ 2\times\frac{1}{2}x+2\times\frac{1}{16}x^3+o_{x\to 0}(x^3)\ \right) \\ &= \frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{8}x^3+o_{x\to 0}(x^3)\right) \\ &= 1+\frac{1}{8}x^2+o_{x\to 0}(x^2)\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=1}$

   Remarque :
   Oui, je sais, ce n'est pas la peine de pousser le DL initial à l'ordre 3. Je l'ai fait pour répondre à une question.
2. Initialement, FI "$\frac{0}{0}$".
   On fait un $DL_3(0)$.
   On trouve : $x\Big(1-\cos(3x)\Big)=\frac{9}{2}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$
   Et : $2\tan(x)-\tan(2x)=2x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
   Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{4}{9}}$.
3. Initialement, FI "1^0".
   On fait le changement de variable $X=\frac{1}{x}$ et on passe par la forme exponentielle.
   On trouve $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=1}$.
4. Initialement, FI "1^0".
   On fait un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur.
   On trouve : $e^x-e^{-x}=2x++\underset{x\to 0}{o}(x^2)$
   Et : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{x}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
   Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=2}$.
5. Initialement, FI "$\frac{0}{0}$".
   On fait le changement de variable $X=x-1$.
   MAIS : les équivalents usuels suffisent, pas besoin de faire un équivalent.
   On trouve $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}}$.

Exercice 8 (Correction rapide)

1. On fait un $DL_3(0)$.
   On trouve : $a(x) = \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
   Donc $\boxed{a(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3}x^3}$.

2. On fait un $DL_3(0)$.
   On trouve : $b(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
   Donc $\boxed{b(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3}$.

3. On fait un $DL_2(0)$.
   On trouve : $c(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
   Donc $\boxed{c(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2}$.

4. On fait un $DL_2(0)$.
   On trouve : $d(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
   Donc $\boxed{d(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2}$.

5. On fait un changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et un $DL_2(+\infty)$.
   On trouve : $e(x) = -\frac{3}{2}X^2 + \underset{X\to 0}{o}(X^2)$
   Donc $\boxed{e(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} -\frac{3}{2x^2}}$.

Exercice 9

Fait en classe.

Exercice 10

Fait en classe.

Exercice 11 (Correction complète)

Soit x au voisinage de 0 avec x différent de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)}{x} \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o_{x\to 0}(x^2) \end{aligned}$$

On en déduit que :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.
- $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$
- $\boxed{\text{L'équation de la tangente à la courbe de } f \text{ en son point d'abscisse } 0 \text{ est } y = 1 - \frac{x}{2}}$
- $\boxed{\text{Au voisinage de son point d'abscisse } 0\text{, la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente.}}$

Exercice 12

Fait en classe.

Exercice 13 (Correction rapide)

Pour x au voisinage de 0, x différent de 0 :
$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{11}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
On en déduit que :

- On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. On continue d'appeler f la fonction ainsi prolongée.
- f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$
- C a pour tangente la droite d'équation $y = 1 + \frac{3}{2}x$ en son point d'abscisse 0.
- Au voisinage de son point d'abscisse 0, C est au-dessus de cette tangente.

Exercice 14 (Correction rapide)

1. On prend des notations : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$
   On utilise la parité : pour tout x au voisinage de 0, $f(x) = f(-x)$.
   On conclut par unicité du DL.
2. Idem.

Exercice 15 (Correction très rapide)

1. Vérifier que le théorème de la bijection s'applique.
2. f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (comme f) et formule de Taylor-Young.
3. f est impaire donc f^{-1} est impaire et on utilise le résultat de l'exercice 14.
4. On compose les développements limités et on trouve :
   $f^{-1}\left(f(x)\right) = ax + (a+b)x^3 + \left(\dfrac{a}{2} + 3b + c\right)x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$
5. Par unicité du DL (par identification), on trouve : $a = 1$, $b = -1$, $c = \dfrac{5}{2}$
   D'où $f^{-1}(y) = y - y^3 + \dfrac{5}{2}y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)$

Exercice 16 (Correction très rapide)

Par imparité, $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

D'où $1 + \tan^2(x) = \tan'(x) = x + \dfrac{a^2}{3}x^3 + \dfrac{2ab}{5}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

D'où, par unicité : $a = 1$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{2}{15}$

$\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

Exercice 17 (Correction rapide)

Dans les deux cas, on utilise la formule de Taylor-Young.

1. $f(x) = f(0) + \dfrac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$
   Donc f a un minimum local en 0.
2. $f(x) = f(0) + \dfrac{x^5}{5!}f^{(5)}(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$
   Donc pas d'extremum local en 0.