DS n°6 - Correction

Exercice 1

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in P \Leftrightarrow 2x - y + z = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x & & \\ y & = & 2x & + & z \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

Ceci prouve que $P = \text{Vect}\Big(\, (1,2,0)\,,\, (0,1,1)\,\Big)$. Donc $\boxed{P \text{ est un espace vectoriel}}$.

On a de plus trouvé une famille génératrice de P. Cette famille est constitué de deux vecteurs non colinéaires ; cette famille est donc libre et c'est une base de P.

$\boxed{\Big(\,(1,2,0)\,,\,(0,1,1)\,\Big) \text{ est une base de } P.}$

Pour la suite, on notera $u_1 = (1,2,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$.

2. On note (a, b, c) les coordonnées de e_1'. On résout alors :

$$\left\{\begin{array}{l} e_1' \in P \\ (e_1 - e_1') \cdot u_1 = 0 \\ (e_1 - e_1') \cdot u_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} 2a & - & b & + & c & = & 0 \\ (1-a)\times 1 & + & (0-b)\times 2 & + & (0-c)\times 0 & = & 0 \\ (1-a)\times 0 & + & (0-b)\times 1 & + & (0-c)\times 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} 2a & - & b & + & c & = & 0 \\ -a & - & 2b & & & = & -1 \\ & - & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} 2a & - & b & + & c & = & 0 & \\ & - & 5b & + & c & = & -2 & 2L_2 + L_1 \\ & & b & + & c & = & 0 & -L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} 2a & - & b & + & c & = & 0 & \\ & - & 5b & + & c & = & -2 & \\ & & 6b & & & = & 2 & L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Les coordonnées de } e_1' \text{ sont } \left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\,,\text{‘}\,-\frac{1}{3}\right)}$

3. Soit u_3 un vecteur non nul normal à P. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_3 = \lambda\,(2,-1,1)$ (d'après l'équation de P).

On étudie la liberté de la famille (u_1, u_2, u_3). Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On résout :

$a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3 = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & & + & 2c\,\lambda & = & 0 \\ 2a & + & b & - & c\,\lambda & = & 0 \\ & & b & + & c\,\lambda & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} a & + & & + & 2c\,\lambda & = & 0 & \\ & & b & - & 5c\,\lambda & = & 0 & L_2 - 2L_1 \\ & & b & + & c\,\lambda & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} a & + & & + & 2c\,\lambda & = & 0 & \\ & & b & - & 5c\,\lambda & = & 0 & \\ & & & & 6c\,\lambda & = & 0 & L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Or, $\lambda \neq 0$ donc ce système a une seule solution : $a = b = c = 0$.

Ceci prouve que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

De plus, cette famille est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Donc cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Pour tout } u_3 \text{ vecteur non nul normal à } P,\ (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

Exercice 2

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
& (x,y,z) \in F_\lambda \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 3y & - & 3z & = & \lambda x \\ -3x & - & y & + & 3z & = & \lambda y \\ 3x & + & 3y & - & z & = & \lambda z \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (5-\lambda)x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ -3x & - & (1+\lambda)y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & (1+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & - & (1+\lambda)y & + & 3z & = & 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (5-\lambda)x & + & 3y & - & 3z & = & 0 & \\ 3x & + & 3y & - & (1+\lambda)z & = & 0 & \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & - & (1+\lambda)y & + & 3z & = & 0 & \\ & & (\lambda-2)^2 y & + & 3(2-\lambda)z & = & 0 & 3L_2 + (5-\lambda)L_1 \\ & & (2-\lambda)y & + & (2-\lambda)z & = & 0 & L_3 + L_1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -3x & - & (1+\lambda)y & + & 3z & = & 0 & \\ & & (\lambda-2)^2 y & + & 3(2-\lambda)z & = & 0 & \\ & & -(\lambda-2)(\lambda+1)y & & & = & 0 & 3L_3 - L_2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Dans le système précédent :

- Si $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$ alors le système a une infinité de solutions.
- Sinon, le système a pour unique solution $(0,0,0)$.

$$\boxed{F_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \ \Leftrightarrow\ \lambda \in \{2,-1\}}$$

2.
- <u>Pour $\lambda = 2$</u>

  Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En repartant de la dernière version du système, on obtient :

  $$(x,y,z) \in F_2 \ \Leftrightarrow\ -3x - 3y + 3z = 0 \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & x & & \\ y & = & & & y \\ z & = & x & + & y \end{array}\right.$$

  Ceci prouve que $F_2 = \mathrm{Vect}\Big(\,(1,0,1)\,,\,(0,1,1)\,\Big)$.

  De plus, cette famille génératrice de F_2 est composée de deux vecteurs non colinéaires.

  Cette famille est donc libre.

  Cette famille est donc une base de F_2.

  $$\boxed{\Big(\,(1,0,1)\,,\,(0,1,1)\,\Big) \text{ est une base de } F_2 \text{ et } \dim(F_2) = 2.}$$

- <u>Pour $\lambda = -1$</u>

  Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En repartant de la dernière version du système, on obtient :

  $$
  \begin{aligned}
  & (x,y,z) \in F_{-1} \\
  \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & 9y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right. \\
  \Leftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcr} x & = & z \\ y & = & -z \\ z & = & z \end{array}\right.
  \end{aligned}
  $$

  Ceci prouve que $F_{-1} = \mathrm{Vect}\Big(\,(1,-1,1)\,\Big)$.

  De plus, cette famille génératrice de F_{-1} est constituée d'un unique vecteur non nul.

  Cette famille est donc une base de F_{-1}.

  $$\boxed{\Big(\,(1,-1,1)\,\Big) \text{ est une base de } F_{-1} \text{ et } \dim(F_{-1}) = 1.}$$

Exercice 3

1. • Parité
   Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui est symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   $$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x} = f(x)$$
   Ces deux points prouvent que $\boxed{f \text{ est paire}}$.

   • Continuité
   Par les théorèmes opératoires, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   $$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$$
   Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
   Donc $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$.

3. • Classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
   Par les théorèmes opératoires, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

   • Dérivabilité en 0
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x) - 1}{x} = -\frac{x}{3} + x\varepsilon(x)$$
   D'où, en passant à la limite quand x tend vers 0, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   • Continuité de f' en 0
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x^2} \times x - \arctan(x) \times 1}{x^2} \\
   &= \frac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)} \\
   &= \frac{x - \left(1+x^2\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right)}{x^2(1+x^2)} \\
   &= \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) + x^3 - \frac{x^5}{3} + x^5\varepsilon(x)\right)}{x^2(1+x^2)} \\
   &= \frac{-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{3} + x^3\varepsilon(x) - x^5\varepsilon(x)}{x^2(1+x^2)} \\
   &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{2}{3}x^3}{x^2} \\
   &\xrightarrow[x\to 0]{} 0
   \end{aligned}$$
   Ainsi, $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, ce qui prouve que f' est continue en 0.

   • Conclusion
   $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 4

1. (a) On définit la fonction g par :

$$g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)-(x-1) \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, g est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in]0,+\infty[$.
$g'(x) \; = \; \dfrac{1}{x} - 1 \; = \; \dfrac{1-x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après ce tableau, pour tout $x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x)-(x-1) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant x-1$.
$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,+\infty[\,,\ \ln(x) \leqslant x-1\ .}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - \ln(x) \neq 0 \end{cases}$
Or, d'après la question 1a, $1 \leqslant x - \ln(x)$ donc la deuxième condition est remplie.
Ainsi, $\boxed{D =]0,+\infty[}$.

2. D'après les théorèmes opératoires sur les fonctions C^1, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D}$.
Soit $x \in D$.
$$f'(x) \; = \; -\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\Big(x-\ln(x)\Big)^2} \; = \; -\frac{x-1}{x\Big(x-\ln(x)\Big)^2}$$
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in D\,,\ f'(x) = \frac{1-x}{x\Big(x-\ln(x)\Big)^2}\ .}$$

3. Soit x au voisinage de $+\infty$.
$$f(x) \; = \; \frac{1}{x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)}$$
Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
$\boxed{C \text{ admet une asymptote horizontale, d'équation } y = 0, \text{ au voisinage de } +\infty\ .}$

4. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.
Donc $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 0}$.

5. (a) Soit x au voisinage de 0^+.
On pose $X = \dfrac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$.
De plus : $x\ln(x) \; = \; \dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right) \; = \; -\dfrac{1}{X}\ln(X) \; = \; -\dfrac{\ln(X)}{X}$
Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln(X)}{X} = 0$
Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0}$

(b) Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{x-\ln(x)}}{x} = \frac{1}{x\left(x-\ln(x)\right)} = \frac{1}{x\ln(x)\left(\frac{x}{\ln(x)}-1\right)}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} - 1 = -1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)\left(\frac{x}{\ln(x)}-1\right) = 0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

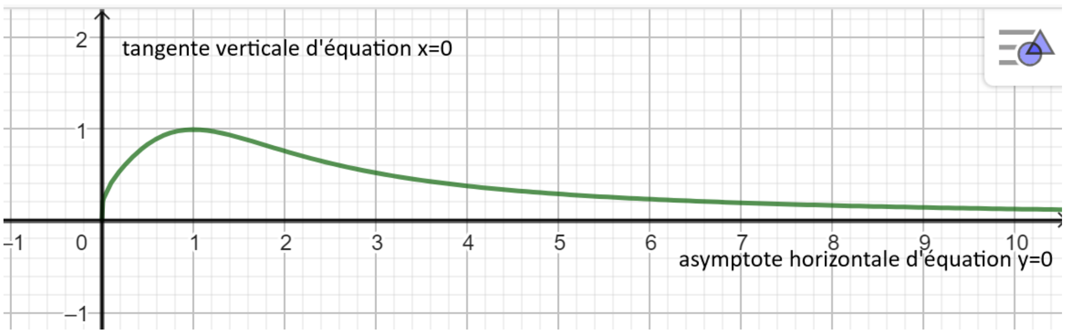
Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

$\boxed{\text{En son point d'abscisse } 0,\ C \text{ admet une tangente verticale.}}$

6. Ce tableau est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

7. (a) La représentation graphique de f est :



(b) On propose :

```
def graphique(a,b):
    X = np.linspace(a,b,10000)
    Y = [1/(x-np.log(x)) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()
```

8. (a) D'après les question précédentes, sur l'intervalle $[0, 1]$, f est continue et strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection, f est bijective de $[0, 1]$ dans $f(\,[0, 1]\,) = [0, 1]$.

Ainsi, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $[0, 1]$.

De même, f est bijective de $]1, +\infty[$ dans $f(\,]1, +\infty[\,) =]0, 1[$.

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $]1, +\infty[$.

$\boxed{\text{L'équation } f(x) = \frac{1}{2} \text{ admet exactement deux solutions sur } D.}$

(b) On propose :

```
def solution(e):
    a = 1
    b = 4
    while b-a >= e:
        c = (a+b)/2
        if 1/(c-np.log(c)) < (1/2) :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a,b)
```