Nom : ....

Interrogation 13 - Mardi 30 avril 2024

De la rentrée à la Toussaint

1. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On veut démontrer que :
   $A \subset \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
   La structure générale du raisonnement est :

2. On veut montrer qu'il existe deux réels a et b tels que la suite de terme général $v_n = an + b$ vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_{n+1} = 2v_n + n + 1$.
   Quelle(s) méthode(s) semble(nt) adaptée(s) ?

3. On définit la suite (u_n) par :
   $$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}.$$
   Pour expliciter le terme général de (u_n), les étapes sont :

4. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :
   $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = v_n - u_n \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \end{cases}.$$
   On anticipe que la nature de (u_n) va être :

   Pour le démontrer, on commence en écrivant :

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$.
   Comment s'y prend-on pour calculer S_n ?

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
   Comment s'y prend-on pour calculer S_n ?

   A quoi faudra-t-il faire attention pendant les calculs ?

7. On veut résoudre $|x-3| + |x+4| \leqslant 7$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Les bons réflexes sont :

8. On veut résoudre : $x + 1 > \dfrac{1}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Les bons réflexes sont :

9. On veut calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$. Que fait-on ?

10. On veut résoudre $\cos(\theta)-\sin(\theta)=1$ d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$. Comment commence-t-on ?

11. On veut résoudre $z^3=-2+2i$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. Comment s'y prend-on ?

12. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

    Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $C_n=\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)$.

    Pour calculer C_n, les idées sont :

13. On demande de résoudre, en fonction du paramètre m, le système (S_m) défini par :

    $$(S_m):\left\{\begin{array}{ccccc}(m+2)x & + & 3y & = & -3\\ 2x & + & (m+3)y & = & 2\end{array}\right.$$

    Quelle est la *première* chose à faire dans les calculs ?

14. Au cours de la résolution d'un système de paramètre $m\in\mathbb{R}$, on arrive à l'étape :

    $$\left\{\begin{array}{ccccccc}2x & + & y & + & z & = & 0\\ & & my & + & z & = & 1\\ & & & & (m-1)(m-2)z & = & 0\end{array}\right.$$

    Les cas à distinguer sont :

De la Toussaint à Noël

1. En Python, on peut modéliser une série statistique par deux listes ; une liste X contenant les modalités et une liste N contenant les effectifs associés.

   On souhaite calculer la moyenne ; comment parcourt-on les listes ?

2. En statistique bivariée, on a une série (x,y).

   On fait le changement de variable $z=\ln(y)$ et on effectue la régression de z en fonction de x. On trouve ainsi deux coefficients a et b tels que $z=ax+b$.

   Exprimer alors y en fonction de x :

3. On définit la fonction f par :

   $$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{2\}\\ x & \mapsto & \dfrac{2x+1}{x-3}\end{array}$$

   Pour démontrer que f est bien définie, les étapes sont :

4. On reprend la fonction de la question précédente.

   On veut démontrer que f est bijective et de déterminer sa réciproque. Comment commence-t-on la rédaction ?

5. Pour chaque fonction usuelle, quelle est la liste des propriétés à connaître ?

6. On définit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.
Pour déterminer son ensemble de définition, on commence la rédaction par :

Ensuite, la bonne façon de résoudre l'inéquation est :

7. On définit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
et $D = P^{-1}AP$.
On anticipe que la matrice D est :

Par ailleurs, la dernière question de l'exercice sera :

8. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
La première question permet de montrer que :
$\forall n \geqslant 2\,,\ A^n = 0_2$.
Les questions suivantes veulent en déduire B^n pour $n \in \mathbb{N}$. Que fait-on ?

9. On note $I = \displaystyle\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx$.
On admet que I est correctement définie.
Comment calcule-t-on I ?

10. On note $I = \displaystyle\int_0^1 x\, e^{x}\, dx$.
On admet que I est correctement définie.
Comment calcule-t-on I ?

11. Soient x et y deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient :
$\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 4x & - & 6y \\ y' & = & x & - & y \end{array}\right.$
On anticipe que x (seule) est solution d'une équation différentielle d'ordre : ......
Pour le démontrer, on commence le calcul en écrivant :

12. Dans un exercice, on a une fonction f qui vérifie :
$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = f(-t)$.
Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$f''(t) \quad =$ (en fonction de f')

$\quad =$ (en fonction de f)

13. Dans l'espace, le système :
$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$
définit un objet de quelle nature ?

14. Dans l'espace, on définit deux droites d et d' et un vecteur $\overrightarrow{u}$.
La question est de démontrer qu'il existe une unique droite Δ dirigée par $\overrightarrow{u}$ et qui coupe d et d'.
Quelle(s) méthode(s) semble(nt) adaptée(s) ?

De Noël aux vacances d'hiver

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot "surclasser" ? (pas de justifications attendues)

2. 5 voleurs dérobent 3 diamants. On veut dénombrer le nombre de partages possibles du butin. Dans chacun des cas, dire s'il y a un ordre et si les répétitions sont possibles.
   (a) Les diamants sont différents et attribués à 3 voleurs différents.
   (b) Les diamants sont différents et chaque voleur peut en recevoir plusieurs.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
   On veut savoir si (u_n) a une limite. Que fait-on ?

4. Un énoncé définit une suite (u_n). La première question permet de montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
   La deuxième question est : en déduire que (u_n) converge.
   Rédiger la réponse à la deuxième question.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} - 1$.
   On veut savoir si (u_n) a une limite.
   Quelle est la première chose à faire ?

6. Quand on étudie une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, quelle est la bonne méthode pour étudier sa monotonie ?

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les polynômes P et Q par :
   $P : x \mapsto (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$
   $Q : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + x$
   Il faut démontrer que P est factorisable par Q.
   Que fait-on ?

8. Il faut résoudre l'équation $\left(P'\right)^2 = 4\,P$ où l'inconnue P est un polynôme réel. Quelles sont les étapes ?

9. On pose $f : x \mapsto \frac{x^2+5}{2x-6}$. Quel est le bon outil pour étudier la limite de f en $+\infty$?

10. On sait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x+1) = 0$.
    Interpréter graphiquement.

Des vacances d'hiver à celles de Pâques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \mapsto x + e^{nx}$.
Il faut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$. Quel est le bon outil ?

2. On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
On demande de démontrer que f réalise une bijection de $I = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty \right[$ sur un intervalle à préciser.
Quel est le bon outil ?

3. On pose $A = \left\{ (a\,,\ a+2b\,,\ 3b) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Démontrer en une ligne que A est un espace vectoriel :

4. On définit G par :
$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+z=0 \text{ et } y+x=z \right\}$.
Il faut déterminer la dimension de G.
Quelles sont les étapes ?

5. Soient a, b, c des réels deux à deux distincts.
On pose $u = (1, a, a^2)$, $v = (1, b, b^2)$ et $w = (1, c, c^2)$.
On veut démontrer que la famille (u, v, w) est libre.
Le début de la rédaction est :

   A la fin des calculs, pour pouvoir déduire que la famille est libre, on anticipe qu'il faut trouver :

6. Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, définie sur D. On demande de déterminer les lignes de niveau de f. Que fait-on ?

7. Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles définie sur D. On demande de déterminer les points critiques de D. Que fait-on ?

8. Il faut démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
Que fait-on ?

9. Soit $f \in C^1\Big( ]a, b[\,, \mathbb{R} \Big)$ avec a, b des réels.
A quelle condition la courbe représentative de f admet-elle une tangente verticale ?

10. Il faut déterminer une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Que fait-on ?

11. Quel est le bon outil pour étudier au voisinage de 0 une fonction f ?

12. On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-\ln(2)}{\sin(x-1)}$.
La question est de faire l'étude locale de f au voisinage de 1. Comment commence-t-on la rédaction de la réponse ?