

Applications linéaires et matrices

Applications linéaires, noyaux, images

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 0)$
3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par
 $f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y - z, 2y + 3z)$
4. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 1, y)$

Exercice 2

On définit la fonction f par :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y + 4z, 3x - z)$$

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f ; f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de f ; f est-elle surjective ?

Exercice 3

On définit la fonction f par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x + y$$

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f ; f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de f ; f est-elle surjective ?

Exercice 4

On définit la fonction f par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie :

$$f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y).$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. Soient $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_2 - e_3$.
 Démontrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_2, u_3)$.

Exercice 6

Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$.
2. Comparer les sev suivants :
 - (a) $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ et $\text{Ker}(f + g)$
 - (b) $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$
 - (c) $\text{Im } f$ et $\text{Im } f^2$

Matrice d'une application linéaire

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z .
2. Déterminer le noyau de f .
3. Donner une base de $\text{Im } f$.

Exercice 8

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note également $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ de matrice (dans les bases canoniques) :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -8 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Donner l'image par f du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z).$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit λ un réel et id l'identité de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ en fonction de λ .
3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.

Exercice 11

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par :

$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$$

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par H_m dans la base canonique et id l'identité de $\mathbb{R}^3$.

- Donner, pour tout réel m , une base de $\text{Ker}(h_m - \text{id})$.
On déterminera un vecteur v_1 non nul commun à tous ces sous-espaces.
- On note $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de h_m dans cette base.

Approfondissement**Exercice 12 - Théorème du rang**

Reprendre les exercices 2, 3, 4 et 7 maintenant que vous connaissez le théorème du rang.

Exercice 13

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f^2 + f - 2\text{id} = 0$, où id désigne l'identité de $\mathbb{R}^n$.

- Montrer que $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
- Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f .
- Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $f^n = a_n \text{id} + b_n f$.
- En déduire une expression de f^n en fonction de f .

Exercice 14 - Formes linéaires

Soient $f \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$. On dit que f est une *forme linéaire sur* $\mathbb{K}^n$.

- (a) Quels sont les rangs possibles pour f ?
(b) En déduire le rang d'une forme linéaire non nulle.
- On suppose désormais que $n \geq 2$.
(a) Si f est une forme linéaire non nulle, déterminer $\dim(\text{Ker } f)$.
(b) Soit G un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n-1$. Démontrer qu'il existe une forme linéaire g sur E telle que $\text{Ker } g = G$.

On pourra considérer une base de G qu'on complètera en une base de E .

Exercice 15 - Projecteurs1. Etude d'un exemple

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$p : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

- Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Déterminer une base de $\text{Ker } p$ et une base de $\text{Im } p$.

L'application p est-elle injective? surjective?
Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

- Montrer que $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{(0, 0, 0)\}$.

- Déterminer la matrice de $p \circ p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Qu'en déduit-on?

2. Cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

On dit que p est un *projecteur* si $p \circ p = p$.

Démontrer que dans ce cas $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Exercice 16 - Symétries1. Etude d'un exemple

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$s : (x, y, z) \mapsto (-2x - 3y, x + 2y, 2x + 2y + z).$$

- Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer $\text{Ker } s$ et $\text{Im } s$. L'application s est-elle injective? surjective? Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
Qu'en déduit-on?
- Déterminer la matrice de $s \circ s$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Qu'en déduit-on?

2. Cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et s un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

On dit que s est une *symétrie* si $s \circ s = \text{id}$ où id est l'application identité de $\mathbb{K}^n$.

Démontrer que dans ce cas $\frac{1}{2}(s + \text{id})$ est un projecteur.