

Algèbre linéaire

Prérequis

Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

A la suite du cours de 1ère année.

Vecteurs

Calcul 31.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

- a) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1), (-1, 2))$
- b) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = ((-1, 2), (0, 1))$
- c) $u = (3, 4)$, $\mathcal{B} = ((1, 2), (12, 13))$
- d) $u = (1, 2, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$
- e) $u = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$

Calculs de rangs

Calcul 31.2 — Sans calcul.



Déterminer le rang des matrices suivantes :

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calcul 31.3



Déterminer le rang des matrices suivantes :

- a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices et Applications linéaires

Calcul 31.4 — Matrices d'endomorphismes.



Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0))$

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$

Calcul 31.5 — Matrices d'applications linéaires.



Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y)$, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$, $\mathcal{B}' = ((2, 0), (0, 1))$

b) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$, $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$.

Réponses mélangées

$$(-1, 1/2, 1/2) \quad (3, -1) \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \quad 3$$

$$(9/11, 2/11) \quad 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (-2, 4/5, 11/5) \quad 1$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \quad 2 \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad (-1, 3) \quad 4$$