Applications linéaires et matrices

Exercice 1 (Correction partielle)

1. On considère les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, 0)$.
   Si f est linéaire, alors $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
   Or : $f(u) = (2, 1)$ et $f(v) = (1, 0)$ donc $f(u) + f(v) = (3, 1)$
   Et : $u + v = (2, 1)$ donc $f(u + v) = (3, 2) \neq f(u) + f(v)$.
   Ceci prouve que $\boxed{\text{f n'est pas une application linéaire.}}$

2. Tout d'abord, f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donc f est bien une application entre deux espaces vectoriels.
   Soient donc u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et λ et μ deux réels.
   On écrit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$. On a alors $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$.
   On calcule :
   $$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f\Big((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \Big) \\ &= ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') , 0) \\ &= (\lambda(x + y) + \mu(y + y') , 0) \\ &= (\lambda(x + y) , 0) + (\mu(y + y') , 0) \\ &= \lambda(x + y , 0) + \mu(y + y' , 0) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$
   Ceci prouve que $\boxed{\text{f est une application linéaire}}$.

3. $\boxed{\text{f est une application linéaire}}$

4. $\boxed{\text{f n'est pas une application linéaire}}$

Exercice 2 (Correction complète)

1. Tout d'abord, f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui sont des espaces vectoriels.

   - Méthode 1 : avec la définition
     Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et λ et μ deux réels.
     On écrit $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$. On a alors $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x' \,,\, \lambda y + \mu y' \,,\, \lambda z + \mu z')$.
     On calcule :
     $$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f\Big((\lambda x + \mu x' \,,\, \lambda y + \mu y' \,,\, \lambda z + \mu z')\Big) \\ &= \big(\,(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z') \,,\; 3(\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z')\,\big) \\ &= \big(\,\lambda(x - y + 4z) + \mu(x' - y' + 4z') \,,\; \lambda(3x - z) + \mu(3x' - z')\,\big) \\ &= \big(\,\lambda(x - y + 4z) \,,\; \lambda(3x - z)\,\big) + \big(\,\mu(x' - y' + 4z') \,,\; \mu(3x' - z')\,\big) \\ &= \lambda(\,x - y + 4z \,,\; 3x - z\,) + \mu(\,x' - y' + 4z' \,,\; 3x' - z'\,) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$
   - Méthode 2 : avec la caractérisation
     Les coordonnées d'une image sont obtenues par combinaison linéaire des coordonnées de l'antécédent.

   Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   $u \in \mathsf{Ker}(f)$

   $\Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0)$

   $\Leftrightarrow (x - y + 4z, 3x - z) = (0, 0)$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & x \\ y & = & 13x \\ z & = & 3x \end{array}\right.$$

   Ceci prouve que $\boxed{\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}\Big((1, 13, 3)\Big)}$.

   Ainsi, $\mathsf{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

3. - Rédaction 1 : *sans* le théorème du rang
     $$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\Big(f(1, 0, 0) \,,\, f(0, 1, 0) \,,\, f(0, 0, 1)\Big) \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1, 3)}_{u_1} , \underbrace{(-1, 0)}_{u_2} , \underbrace{(4, -1)}_{u_3}\Big) \end{aligned}$$
     On constate que $u_1 + 3u_2 + 13u_3 = (0, 0)$
     Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathsf{Vect}\Big((1, 3) \,,\, (-1, 0)\Big)$
     La famille $\Big((1, 3) \,,\, (-1, 0)\Big)$ est libre (deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre).
     Donc $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 2, inclus dans $\mathbb{R}^2$. Nécessairement, on a donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$.
     Et donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.
   - Rédaction 2 : *avec* le théorème du rang
     D'après le théorème du rang : $\dim\Big(\mathrm{Ker}\ f\Big) + \mathrm{rg}\ (f) = \dim\Big(\mathsf{R}^3\Big)$, d'où $\mathrm{rg}\ (f) = 2$.
     Ceci prouve que $\mathrm{Im}\ (f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim\Big(\mathrm{Im}\ f\Big) = \dim\ (\mathbb{R}^2)$.
     On a une inclusion et l'égalité des dimensions, donc $\boxed{\mathrm{Im}\ (f) = \mathbb{R}^2}$ et $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

Exercice 3 (Correction rapide)

1. On utilise la définition ou la caractérisation.
2. $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}\Big(\,(1,-2)\,\Big)$ et $\boxed{\text{f n'est pas injective}}$
3. $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Vect}\Big(f(0,1), f(1,0)\Big) = \mathsf{Vect}\Big(\underbrace{2}_{u_1}, \underbrace{1}_{u_2}\Big)$

ATTENTION : dans l'écriture précédente, c'est "juste" $u_1 = 2$ et par ailleurs "juste" $u_2 = 1$.
u_1 et u_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}$, qui est unidimensionnel. Réfléchissez-y bien.

Or, $u_1 = 2u_2$.
Donc $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Vect}(1) = \mathbb{R}$.
$\boxed{\mathsf{Im}(f) = \mathbb{R}}$ et $\boxed{\text{f est surjective}}$.

Exercice 4

Sera fait en classe.

Exercice 5 (Correction rapide)

1. On trouve $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}\Big((2,2,1)\Big)$ et donc $\boxed{\Big((2,2,1)\Big) \text{ est une base de } \mathsf{Ker}(f)}$.
2. Tout d'abord, cela revient à dire que : $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (0,1,-1)$
Initialement, on trouve $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Vect}\Big(\underbrace{(6,5,1)}_{v_1}, \underbrace{(-4,-3,-1)}_{v_2}, \underbrace{(-4,-4,0)}_{v_3}\Big)$.
Là dedans, $v_1 + v_2 = -\dfrac{1}{2}v_3$ donc $\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Vect}\Big((-4,-3,-1)\,,\,(-4,-4,0)\Big)$.
On transforme :
$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(f) &= \mathsf{Vect}\Big((-4,-3,-1)\,,\,(-4,-4,0)\Big) \\
&= \mathsf{Vect}\Big((0,1,-1)\,,\,(-4,-4,0)\Big) && v_1 \leftarrow v_1 - v_2 \\
&= \mathsf{Vect}\Big((0,1,-1)\,,\,(1,1,0)\Big) && v_2 \leftarrow -\tfrac{1}{4}v_2 \\
&= \mathsf{Vect}(u_3, u_2)
\end{aligned}$$
$\boxed{\mathsf{Im}(f) = \mathsf{Vect}(u_2, u_3)}$

Exercice 6 (Correction presque complète)

1. Double implication.
   - Implication directe.
     Il suffit de traduire : on prend $y \in \mathrm{Im}(f)$, on l'écrit $y = f(x)$.
     On en déduit que $g(y) = g \circ f(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$.
   - Implication réciproque.
     Il suffit de traduire : on prend $x \in E$.
     Ainsi, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ donc $g\Big(f(x)\Big) = 0$ et $g \circ f = 0$

2. (a)
   - <u>L'inclusion directe est vraie</u>
     Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
     On sait donc que :
     $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $f(u) = 0_E$
     $u \in \mathrm{Ker}(g)$ et donc $g(u) = 0_E$.
     Ainsi, $(f+g)(u) = f(u) + g(u) = 0_E + 0_E = 0_E$ et donc $u \in \mathrm{Ker}(f+g)$
     Ceci prouve que $\boxed{\Big(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)\Big) \subset \mathrm{Ker}(f+g)}$.
   - <u>L'inclusion réciproque est en générale fausse</u>
     On fournit un contre-exemple. On prend :
     $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-x,-y) \end{array}$$
     (Et il reste à vérifier que ça fournit bien un contre-exemple !)

   (b)
   - <u>L'inclusion directe est vraie</u>
     Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$: on a donc $f(u) = 0_E$.
     Et donc : $f^2(u) = f \circ f(u) = f(0_E) = 0_E$, ce qui prouve que $u \in \mathrm{Ker}(f^2)$.
     Ainsi : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)}$.
   - <u>L'inclusion réciproque est en générale fausse</u>
     On fournit un contre-exemple. On prend :
     $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (0,x) \end{array}$$
     (Et il reste à vérifier que ça fournit bien un contre-exemple !)

   (c)
   - <u>L'inclusion réciproque est vraie</u>
     Soit $w \in \mathrm{Im}(f^2)$.
     On traduit : il existe $u \in E$ tel que $w = f^2(u)$.
     On a donc : $w = f\Big(f(u)\Big)$.
     D'où, en posant $v = f(u)$: $w = f(v)$ et donc $w \in \mathrm{Im}(f)$.
     Ainsi : $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$.
   - <u>L'inclusion directe est en générale fausse</u>
     On fournit un contre-exemple. On prend :
     $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (0,x) \end{array}$$
     (Et il reste à vérifier que ça fournit bien un contre-exemple !)

Exercice 7 (Correction rapide)

1. $f(x, y, z) = \Big(3x + y + 3z \,,\; x + 2y - 4z \,,\; y - 3z \,,\; 2x - y + 7z \Big)$.
2. On trouve $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\Big((-2, 3, 1) \Big)$
3. Conformément au théorème du rang, on sait qu'il faut trouver $\mathrm{Im}(f)$ de dimension 2.
   $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big((3, 1, 0, 2) \,,\; (1, 2, 1, -1) \,,\; (3, -4, -3, 7) \Big) = \mathrm{Vect}\Big((3, 1, 0, 2) \,,\; (1, 2, 1, -1) \Big)$ (car $3u_2 + u_3 = 2u_1$)

Exercice 8 (Correction quasi complète)

1. • Méthode 1
   Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   On résout : $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0) \;\Leftrightarrow\; \dots \;\Leftrightarrow a = b = c = 0$
   Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
   De plus, cette famille est constituée de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.
   Donc $\boxed{B \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
   • Méthode 2
   $\mathrm{rg}\Big(u_1, u_2, u_3 \Big) \;=\; \dots \;= 3$
   De plus, cette famille est constituée de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.
   Donc $\boxed{B \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
2. On calcule :
   • $f(u_1) \;=\; (1, 1, 1) \;=\; 1 \times u_1 + 0 \times u_2 + 0 \times u_3$
   • $f(u_2) \;=\; (1, -2, 0) \;=\; 0 \times u_1 + 2 \times u_2 + 0 \times u_3$
   • $f(u_3) \;=\; (0, 0, 0) \;=\; 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 0 \times u_3$

   Ainsi $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } B \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

1. • $\mathrm{Im}(f)$
   Puisque B est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut l'utiliser pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$
   $\mathrm{Im}(f) \;=\; \mathrm{Vect}\Big(f(u_1) \,,\; f(u_2) \,,\; f(u_3) \Big) \;=\; \mathrm{Vect}(u_1, 2u_2) \;=\; \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$
   De plus, la famille (u_1, u_2) est formée de deux vecteurs non colinéaires ; cette famille est donc libre.
   $\boxed{\Big(u_1 \,,\; u_2 \Big) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$
   - $\mathrm{Ker}(f)$
   D'après le théorème du rang : $\dim\Big(\ker(f) \Big) + \mathrm{rg}(f) = 3$.
   Or, d'après le début de la question, $\mathrm{rg}(f) = 2$.
   Donc $\dim\Big(\ker(f) \Big) = 1$
   Or, d'après la matrice de la question 2, $u_3 \in \ker(f)$, u_3 étant un vecteur non nul.
   Donc $\boxed{(u_3) \text{ est une base de } \ker(f)}$.

Exercice 9 (Correction rapide)

On note $\mathsf{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. On démontre que $\mathsf{F} = \mathsf{Vect}\Big(\ (-1, 1, 0)\ ,\ (-1, 0, 1)\ \Big)$.
$f(\mathsf{F}) = \mathsf{Vect}\Big(\ f((-1, 1, 0))\ ,\ f((-1, 0, 1))\ \Big) = \cdots = \mathsf{Vect}\Big((3, -5, 1, 4)\Big)$.

Exercice 10 (Grandes lignes)

1. On trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. On traduit : $(x, y, z) \in \text{Ker } (f - \lambda\, \mathrm{id})$
   $\Leftrightarrow \dots$
   $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & \lambda x \\ x & & & +z & = & \lambda y & \\ & & y & + & z & = & \lambda z \end{array} \right.$
   Les valeurs de λ à distinguer sont 1, -1 et 2.
   Pour ces valeurs, on trouve $\text{Ker } (f - \lambda\, \mathrm{id})$ de dimension 1.
   Sinon, $\text{Ker } (f - \lambda\, \mathrm{id}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
3. Indication 1 : si on note $B' = (u_1, u_2, u_3)$, alors $f(u_1) = \dots$, $f(u_2) = \dots$ et $f(u_3) = \dots$
   Indication 2 : si on traduit correctement les résultats de la question 2, on se rend compte qu'on a déjà obtenu les vecteurs u_1, u_2 et u_3.

Exercice 11 (Correction rapide)

1. On procède un peu comme dans l'exercice 10.
   - Si $m = 0$: $\mathsf{Ker}(h_m - \mathrm{id}) = \mathsf{Vect}\Big((1, 0, 1)\,,\ (0, 1, 0)\Big)$ (et on a une base)
   - Sinon : $\mathsf{Ker}(h_m - \mathrm{id}) = \mathsf{Vect}\Big((1, 1, 1)\Big)$ (et on a une base)

   $v_1 = (1, 1, 1)$
2. On a une famille de 3 vecteurs en dimension 3. Pour vérifier qu'on a une base, il suffit donc de vérifier que la famille est libre. Ce qu'on fait en résolvant le système associé.
   Pour obtenir la matrice, on calculer :
   $h_m(v_1) = v_1$ (puisque $v_1 \in \mathsf{Ker}(h_m - \mathrm{id})$)
   $h_m(v_2) = \cdots = (1 - m)v_2$
   $h_m(v_3) = \cdots = (m - 2)v_2 + (1 - m)v_3$ (c'est le moins évident à obtenir, mais ça se fait).
   La matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & m-2 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Le faire.

Exercice 13 (Correction complète)

1.
   - Inclusion réciproque
     Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel, $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   - Inclusion directe
     Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$.
     En appliquant l'égalité vérifiée par f à u, on obtient :
     $f^2(u) + f(u) - 2u = 0_{\mathbb{R}^n}$.
     Or : $u \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
     Il reste donc $-2u = 0_{\mathbb{R}^n}$, d'où $u = 0_{\mathbb{R}^n}$, d'où $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
   - Conclusion
     $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$

2. La question précédente prouve que f est injective.
   De plus, f est un endomorphisme donc f est surjective.
   Ainsi, f est un endomorphisme bijectif c'est-à-dire : $\boxed{f \text{ est un automorphisme}}$.
   Pour obtenir f^{-1}, on transforme : $f^2 + f - 2\mathrm{id} = 0 \iff f \circ \left[\frac{1}{2}\Big(f + \mathrm{id}\Big)\right] = \mathrm{id}$
   Cette égalité prouve que $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{2}\Big(f + \mathrm{id}\Big)}$.

3. On procède par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 0$
     $f^0 = \mathrm{id} = 1\,\mathrm{id} + 0\,f$.
     Donc l'égalité est vraie en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
   - Hérédité
     On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe a_n et b_n des réels tels que $f^n = a_n\mathrm{id} + b_n f$.
     $$\begin{aligned} f^n n+1 &= f^n \circ f \\ &= \Big(a_n\mathrm{id} + b_n f\Big) \circ f \\ &= a_n f + b_n f^2 \\ &= a_n f + b_n\Big(-f + 2\mathrm{id}) \\ &= \Big(2b_n\Big)\mathrm{id} + \Big(a_n - b_n\Big)f \end{aligned}$$
     La propriété est donc vraie au rang $n+1$ en posant : $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n - b_n$.
   - Conclusion
     $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } f^n = a_n\mathrm{id} + b_n f\ .}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente : $b_{n+2} \;=\; a_{n+1} - b_{n+1} \;=\; 2b_n - b_{n+1}$
   On en déduit que la suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.
   - Equation caractéristique
     On résout : $x^2 = 2 - x$, c'est-à-dire $x^2 + x - 2 = 0$. Les solutions sont 1 et -2.
   - Terme général
     Ainsi, il existe λ et μ des réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lambda \times 1^n + \mu \times 2^n = \lambda + \mu 2^n$.
   - Constantes
     Pour déterminer λ et μ, on résout :
     $$\left\{\begin{array}{lcl} b_0 &=& 0 \\ b_1 &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcccl} \lambda &+& \mu &=& 0 \\ \lambda &-& 2\mu &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcll} \mu &=& -\frac{1}{3} & \frac{L_1 - L_2}{3} \\ \lambda &=& \frac{1}{3} & \end{array}\right.$$
   - Conclusions
     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{3}\Big(1 - (-2)^n\Big)$.
     Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2}{3}\Big(1 - (-2)^{n-1}\Big)$.
     $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \frac{2}{3}\Big(1 - (-2)^{n-1}\Big)\mathrm{id} + \frac{1}{3}\Big(1 - (-2)^n\Big)f\ .}$

Exercice 14 (Très grandes lignes)

1. (a) On utilise le théorème du rang. Les rangs possibles pour f sont 0 et 1.
   (b) 1.
2. (a) $n - 1$.
   (b) Pour G, on prend une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$.
   On la complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E.
   On considère l'application $g : E \to \mathbb{R}$ et pour laquelle $g(e_1) = \cdots = g(e_{n-1}) = 0$ et $g(e_n) = 1$.
   On vérifie qu'elle convient.

Exercice 15 (Correction détaillée)

1. (a) On note A la matrice demandée.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$e_1 = (1,0,0)$ donc $f(e_1) = \dfrac{1}{3}\,(2,-1,-1)$ et la première colonne de A est $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On obtient de même les deuxième et troisième colonnes de A.

$\boxed{\text{La matrice demandée est } A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$

(b)
- <u>Pour $\mathrm{Ker}(p)$</u>
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$u \in \mathrm{Ker}(p)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2x & - & y & - & z & = & 0 & \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_23 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1)\Big)$; on a une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(p)$ constituée d'un seul vecteur non nul. On a donc une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Ker}(p) \text{ est } \Big((1,1,1)\Big).}$

- <u>Injectivité, surjectivité, automorphisme</u>
Puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, on peut déjà dire que $\boxed{p \text{ n'est pas injective}}$.

De plus, p est un endomorphisme. Donc le fait que p ne soit pas injective implique que $\boxed{p \text{ n'est pas surjective}}$.

Et, nécessairement, $\boxed{p \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

- <u>Pour $\mathrm{Im}(p)$</u>
Tout d'abord, d'après le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$.
On calcule : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\Big(p(e_1), p(e_2), p(e_3)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(\,(2,-1,-1)\,,\,(-1,2,-1)\,,\,(-1,-1,2)\Big)$
Or : $(2,-1,-1) + (-1,2,-1) + (-1,-1,2) = (0,0,0)$ donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\Big(\,(2,-1,-1)\,,\,(-1,2,-1)\,\Big)$.
On a ainsi une famille génératrice $\mathrm{Im}(p)$ constitué de deux vecteurs. Comme $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension 2, cette famille est nécessairement une base de $\mathrm{Im}(p)$.

$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}(p) \text{ est } \Big(\,(2,-1,-1)\,,\,(-1,2,-1)\,\Big).}$

(c) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$u \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ si et seulement si le système suivant, d'inconnues a, b et c réelles, admet une solution : $a(1, 1, 1) = b(2, -1, -1) + c(-1, 2, -1)$.

On résout donc ce système :
$a(1, 1, 1) = b(2, -1, -1) + c(-1, 2, -1)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & = & 2b & - & c \\ a & = & -b & + & 2c \\ a & = & -b & - & c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} a & = & 2b & - & c & \\ & = & -3b & + & 3c & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & = & -3b & & & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow a = b = c = 0$

Ce raisonnement prouve qu'il existe un unique élément dans $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$: c'est $u = (0, 0, 0)$.
$\boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$

(d) On avait noté A la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On calcule :
$$A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
On trouve $\boxed{A^2 = A}$.
On en déduit que $\boxed{p \circ p = p}$.

2. Soit p un projecteur de $\mathbb{K}^n$.
On procède par double inclusion.

- <u>Inclusion réciproque</u>
$\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.
Donc $\{0_{\mathbb{K}^n}\} \subset \mathrm{Im}(p)$ et $\{0_{\mathbb{K}^n}\} \subset \mathrm{Ker}(p)$.
Donc $\{0_{\mathbb{K}^n}\} \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p)$.
- <u>Inclusion directe</u>
Soit $u \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$.
$u \in \mathrm{Ker}(p)$ donc $p(u) = 0_{\mathbb{K}^n}$.
$u \in \mathrm{Im}(p)$ donc il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = p(v)$.
Ainsi :

  $\rightarrow$ Comme $u = p(v)$, on a $p(u) = p \circ p(v)$
  $\rightarrow$ Comme $p(u) = 0_{\mathbb{K}^n}$, on a $p \circ p(v) = 0_{\mathbb{K}^n}$
  $\rightarrow$ Comme $p \circ p = p$, on a $p(v) = 0_{\mathbb{K}^n}$
  $\rightarrow$ Cela veut dire que $u = 0_{\mathbb{K}^n}$

  Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}}$.

Exercice 16 (Correction rapide)

1. (a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\mathrm{Ker}(s) = \{(0,0,0)\}$.
   On en déduit tout de suite que s est injective.
   Donc, puisque s est un endomorphisme, s est aussi surjective.
   Donc s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   Donc $\mathrm{Im}(s) = \mathbb{R}^3$ *(sans **aucun** calcul supplémentaire !)*

   (c) $A^2 = I_3$ et donc $s^2 = \mathrm{id}$

2. Il faut démontrer que $\left(\frac{1}{2}(s+\mathrm{id})\right) \circ \left(\frac{1}{2}(s+\mathrm{id})\right) = \frac{1}{2}(s+\mathrm{id})$.

   Or :
   $$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(s+\mathrm{id})\right) \circ \left(\frac{1}{2}(s+\mathrm{id})\right) &= \frac{1}{4}(s+\mathrm{id}) \circ (s+\mathrm{id}) \\ &= \frac{1}{4}\Big(s\circ s + s\circ \mathrm{id} + \mathrm{id}\circ s + \mathrm{id}\circ \mathrm{id}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\mathrm{id} + s + s + \mathrm{id}\Big) \\ &= \frac{1}{4} \times 2(s+\mathrm{id}) \end{aligned}$$

   CQFD