

DM7 (Correction)

Exercice

1. Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- .

D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE $(E_n, \overline{E}_n)$:

$$\begin{aligned}
 P(F_n) &= P(E_n) \times P(F_n|E_n) + P(\overline{E}_n) \times P(F_n|\overline{E}_n) \\
 &= P(E_n) \times \frac{1}{2} + (1 - P(E_n)) \times p \\
 &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right)P(E_n)
 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right)P(E_n)$

- 2.
- Stratégie 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Dans cette stratégie, on a en fait $P(E_n) = \frac{1}{2}$.

En injectant dans la formule de la question 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(F_n) &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right)P(E_n) \\
 &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right)\frac{1}{2} \\
 &= p + \frac{1-2p}{4} \\
 &= \frac{2p+1}{4}
 \end{aligned}$$

Dans la stratégie 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(F_n) = \frac{2p+1}{4}$

- 3.
- Stratégie 2

(a) $P(F_1) = \frac{2p+1}{4}$

Justification : au premier lancer, la stratégie 2 est identique à la 1.

- (b) Soit
- $n \geq 2$
- .

Tout d'abord, dans cette stratégie, le premier lancer détermine tous les autres.

Ainsi, l'événement $E_n \cap E_1$ (choisir la pièce équilibrée au premier et au $n^{\text{ème}}$ lancer) est égal à l'événement $E_1 \cap F_1$ (choisir la pièce équilibrée au premier lancer et obtenir "face").

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(E_n|E_1) = \frac{P(E_n \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1 \cap F_1)}{P(E_1)} = P(F_1|E_1) = \frac{1}{2}.$$

De même :

$$P(E_n|\overline{E}_1) = \frac{P(E_n \cap \overline{E}_1)}{P(\overline{E}_1)} = \frac{P(\overline{E}_1 \cap \overline{F}_1)}{P(\overline{E}_1)} = P(\overline{F}_1|\overline{E}_1) = 1 - p.$$

Enfin, d'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événement $(E_1, \overline{E}_1)$:

$$\begin{aligned}
 P(E_n) &= P(E_1) \times P(E_n|E_1) + P(\overline{E}_1) \times P(E_n|\overline{E}_1) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1 - p) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1-2p}{2} \\
 &= \frac{3-2p}{4}
 \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 2$, $P(E_n|E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_n|\overline{E}_1) = 1 - p$ et $P(E_n) = \frac{3-2p}{4}$

(c) Soit $n \geq 2$. On injecte le résultat précédent dans la formule de la question 1 et on obtient :

$$\begin{aligned} P(F_n) &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right) \times \frac{3-2p}{4} \\ &= p + \frac{(1-2p)(3-2p)}{8} \\ &= p + \frac{4p^2 - 8p + 3}{8} \\ &= \frac{4p^2 + 3}{8} \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 2$, on a bien $P(F_n) = \frac{4p^2 + 3}{8}$
--

4. On veut savoir quelle stratégie a le plus de chances d'obtenir face à chaque lancer.

Au premier lancer, les deux stratégies ont la même probabilité d'obtenir face.

Pour les lancers suivants, le problème revient à résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{2p+1}{4} < \frac{4p^2+3}{8} &\Leftrightarrow 0 < \frac{4p^2+3}{8} - \frac{2p+1}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{4p^2 - 4p + 1}{8} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{(2p-1)^2}{8} \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $p > \frac{1}{2}$. Donc $(2p-1)^2 > 0$.

En remontant les équivalences précédentes, on en déduit que la deuxième stratégie est meilleure que la première.

Au premier lancer, les deux stratégies sont identiques ; à partir du deuxième lancer, la stratégie 2 est meilleure.
