Nom : ....

Interrogation 13 - Mardi 29 avril 2025

Septembre - Octobre

1. Soient A, B et C trois ensembles.
   On veut démontrer que :
   $$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$
   La structure globale du raisonnement est :

2. Il faut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
   Quelle(s) méthode(s) envisagez-vous ?

3. On définit la suite (u_n) par :
   $$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$$
   On veut exprimer le terme général de (u_n).
   Quelles sont les étapes ?

4. On considère la suite (u_n) définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -5 \\ u_2 = 13 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$
   On définit la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} + 2u_n$$
   On anticipe que la nature de (v_n) va être :

   Pour le démontrer, on commence en écrivant :

5. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$W_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$$
   La première question fait démontrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)! - k! = k \times k!$$
   Comment s'y prend-on ensuite pour calculer W_n ?

6. On veut résoudre $|x^2+6x+5| \leqslant x+5$ d'inconnue le réel x.
   Les bons réflexes sont :

7. On veut résoudre $\dfrac{x^2+4}{x+1} \leqslant 3x+2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Les bons réflexes sont :

8. On définit la fonction f par :
$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$
   Avant même de lire les questions, à quoi pense-t-on ?

9. On veut résoudre $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2}$ d'inconnue le réel x.
   Comment commence-t-on ?

10. On demande de résoudre l'équation $z^5=1$ d'inconnue le nombre *complexe* z.
    Comment débute-t-on les calculs ?

11. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on définit le système à paramètre (S_m) par :
$$(S_m) \ : \left\{\begin{array}{ccccc} -(5+m)\,x & + & 3\,y & = & 0 \\ 6\,x & - & (2+m)\,y & = & 0 \end{array}\right.$$
    Quelle est la première chose à faire ?

    Au cours de la résolution, on arrive à l'étape :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} 6x & - & (2+m)y & = & 0 \\ & & \Big(-m^2-7m+8\Big)y & = & 0 \end{array}\right.$$
    Les cas à distinguer sont :

Novembre - Décembre

1. En Python, on peut modéliser une série statistique par deux listes ; une liste X contenant les modalités et une liste N contenant les effectifs associés.

   On souhaite calculer la moyenne ; comment parcourt-on les listes ?

2. On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to &]-\infty\,,0[\cup]1\,,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{e^x-1} \end{array}$$

   On veut démontrer que f est bijective *et déterminer sa réciproque*. Comment commence-t-on la rédaction ?

3. Pour chaque fonction usuelle, quelle est la liste des propriétés à connaître ?

4. On définit la matrice A par :
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On veut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n A^2$.

   Quelle est la bonne méthode ?

5. On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

   On pose $B = A - 2I_3$.

   On demande de calculer B^2 puis de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n en fonction de B et n.

   Quelle est la méthode ?

6. On reprend la situation précédente.

   On demande d'en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n en fonction de A, I_3 et n.

   Que fait-on ?

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

   On admet que ces intégrales sont correctement définies. On veut établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

   Quelle méthode utilise-t-on ?

8. On note $I = \displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$.

   On admet que I est correctement définie.

   Comment calcule-t-on I ?

9. Dans un exercice, on a une fonction f qui vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = f(-t)$.

   Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

   $f''(t) \quad =$ (en fonction de f')

   $\quad =$ (en fonction de f)

10. Dans l'espace, d_1 est la droite passant par $A(2,1,2)$ et $B(1,0,1)$. d_2 est définie par :

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

   On veut déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ orthogonal à la fois à d_1 et à d_2.

   Quelle(s) méthode(s) semble(nt) adaptée(s) ?

Janvier - Février

1. On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides).
   Sans justifier, combien peut-on former de telles grilles différentes ?

2. On reprend les données de la question précédente.
   On fixe une grille.
   Sans justifier, combien y a-t-il de façons de la remplir (avec l'alphabet latin, sans accent, avec des mots n'ayant pas nécessairement de sens) ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
   $$u_n = S_n - 2\sqrt{n}$$
   On veut étudier la monotonie de (u_n).
   On commence la rédaction par :

4. On définit la suite (u_n) par :
   $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{u_n + 1} \end{cases}$$
   On admet que (u_n) est correctement définie.
   On veut étudier la monotonie de (u_n).
   Que fait-on ?

5. On définit la suite (u_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   On veut démontrer que (u_n) admet une limite.
   Quel est le bon outil ?

6. On définit $P : x \mapsto x^3 + 3x - 14$.
   Comment s'y prend-on pour résoudre $P(x) = 0$ d'inconnue le réel x ?

7. On veut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n)\ :\ e^x + x = n$ admet une unique solution réelle.
   Quel est le bon outil ?

8. On définit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
   On demande de démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur un ensemble à préciser.
   Quel est le bon outil ?

   A quoi faut-il faire attention en utilisant cet outil ?

9. On pose $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + x^2 + 4}{2x^3 + 5}$.
   Quel est le bon outil pour étudier la limite de f en $+\infty$?

10. On pose $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
    Quel est le bon outil pour étudier la limite de f en 0 ?

Mars - Avril

1. On pose $A = \left\{ \left(a+b\,,\, -a-2b \right) \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$.
   Démontrer en une ligne que A est un espace vectoriel :

2. On définit $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ et } x+z = 0 \right\}$.
   On veut justifier que F est un espace vectoriel.
   Comment commence-t-on la rédaction ?

3. On reprend l'ensemble F de la question précédente.
   On veut déterminer la dimension de F.
   Quelles sont les étapes ?

4. Soient a, b, c des réels deux à deux distincts.
   On pose $u = (1, a, a^2)$, $v = (1, b, b^2)$ et $w = (1, c, c^2)$.
   On veut démontrer que la famille (u, v, w) est libre.
   Le début de la rédaction est :

   A la fin des calculs, pour pouvoir déduire que la famille est libre, on anticipe qu'il faut trouver :

5. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$.
   f est définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
   On veut étudier l'ensemble sur lequel f est dérivable.
   La rédaction commence par :

6. On dispose de deux dés A et B à 6 faces équilibrés :
   - Le dé A a 4 faces noires et 2 faces blanches.
   - Le dé B a 2 faces noires et 4 faces blanches.

   On lance d'abord une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient pile, on fait des lancers successifs avec le dé A et si on obtient face on fait des lancers successifs avec le dé B.
   On veut calculer la probabilité d'obtenir noir au premier lancer.
   Quel est le premier réflexe de rédaction ?

7. On reprend la situation de la question précédente.
   Quelle est la bonne formule de probabilité ?

8. On définit f par :

$$f : \begin{array}{ccl}]-1\,, +\infty\,[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   On veut "faire l'étude de f au voisinage de 0".
   Qu'est-ce que cela veut dire, précisément ?

9. On pose $f : x \mapsto x \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.
   On note C la représentation graphique de f.
   On veut étudier l'éventuelle asymptote de C au voisinage de $+\infty$.
   On fait le changement de variable :

   $X =$

   La première ligne de calcul est donc :

   $f(x) =$