Semaine 24 - Lundi 5 mai au vendredi 9 mai

Chap 22 - DL et études de fonctions réelles

I/ Négligeabilité

- Définition : fonction négligeable devant x^n au voisinage de 0
- Propriétés : si $n < p$, alors x^p est négligeable devant x^n ; si f est négligeable devant x^n alors f est négligeable devant x^n ; la somme de deux fonctions négligeables devant x^n est négligeable devant x^n

II/ Développements limités

1. Définition
   - Définition : développement limité à l'ordre n en 0
   - Définitions : développement limité à l'ordre n en a, en $+\infty$, en $-\infty$
   - Remarque : dans la pratique, pour obtenir un DL, on se ramène toujours à un DL(0) via un changement de variable
2. Unicité
   - Proposition : Si f admet un $DL_n(0)$, alors ce DL est unique
3. Existence
   - Proposition : Formule de Taylor-Young
4. DL usuels
   - Proposition : $DL_n(0)$ de e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$ et $\ln(1+x)$
5. Opérations sur les DL
   - Proposition : troncature
   - Propositions : somme, produit par un scalaire, produit
   - Proposition : intégration
   - Proposition : composition

III/ Applications

1. Limites et équivalents
2. Etude locale en 0
   - Prolongement par continuité
   - Dérivabilité
   - Tangente
   - Position relative courbe/tangente
3. Etude asymptotique
   - Asymptote horizontale
   - Branche parabolique de direction (Oy), ou de direction (Ox), ou de direction la droite d'équation $y = ax$
   - Asymptote oblique

Chap 23 - Applications linéaires et matrices

I/ Applications linéaires

1. Définitions
   - Définitions : application linéaire, notation $L(E, F)$
   - Exemple important : id_E
   - Définitions : endomorphisme ($L(E)$), isomorphisme, automorphisme ($GL(E)$)
   - Propriétés des applications linéaires : $f(0_E) = 0_F$ et $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$
2. Opérations sur les applications linéaires
   - Propositions : la somme de deux AL, le produit d'une AL par un scalaire, la composée de deux AL et la réciproque d'une AL (si elle existe) sont des AL

II/ Noyau et image

1. Noyau
   - Définition : Ker(f) est l'ensemble des antécédents de 0_F
   - Proposition : Ker(f) est un sev de E
   - Proposition : f est injective $\Leftrightarrow$ Ker$(f) = \{0_E\}$
2. Image
   - Définition : Im$(f) = f(E)$
   - Proposition : Im(f) est un sev de F
   - Proposition : f est surjective $\Leftrightarrow$ Im$(f) = F$
   - Proposition : si E a pour base $B = (e_1, \dots, e_p)$, alors Im(f) =Vect$\Big(f(e_1), \dots, f(e_p) \Big)$

III/ Applications linéaires en dimension finie

1. Reconnaître une application linéaire en dimension finie
   - Proposition : toute application f qui va de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de la forme $f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \Big(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \,,\, \dots \,,\, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \Big)$ est linéaire
2. Construction par choix de l'image d'une base
   - Proposition : si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ et si $(U_1, \dots, U_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, alors il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = U_j$

Questions de cours

1. *Avec preuve*
   Enoncer (sans preuve) la formule de Taylor-Young et en déduire (avec preuve) les formules suivantes :
   - $DL_n(0)$ de exp ($n \in \mathbb{N}$)
   - $DL_3(0)$ et $DL_4(0)$ de cos
   - $DL_3(0)$ et $DL_4(0)$ de sin
2. *Avec preuve*
   Enoncer (sans preuve) la formule de Taylor-Young et en déduire (avec preuve) les formules suivantes :
   - $DL_n(0)$ de $(1 + x)^\alpha$ ($n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$)
   - $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1 + x}$
   - $DL_2(0)$ de $\sqrt{1 + x}$
3. *Avec preuve*
   Donner la définition du noyau d'une application linéaire et démontrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
4. *Avec preuve*
   Donner la définition de l'image d'une application linéaire et démontrer que l'image d'une application linéaire est un espace vectoriel.
5. *Sans preuve*
   Enoncer la proposition qui permet de déterminer l'image d'une application linéaire en dimension finie ainsi que la proposition sur la construction par choix de l'image d'une base.