# Semaine 25 - Lundi 12 mai au vendredi 16 mai

## Chap 23 - Applications linéaires et matrices

### I/ Applications linéaires

1. Définitions
   - Définitions : application linéaire, notation $L(E, F)$
   - Exemple important : $\mathrm{id}_E$
   - Définitions : endomorphisme ($L(E)$), isomorphisme, automorphisme ($GL(E)$)
   - Propriétés des applications linéaires : $f(0_E) = 0_F$ et $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$
2. Opérations sur les applications linéaires
   - Propositions : la somme de deux AL, le produit d'une AL par un scalaire, la composée de deux AL et la réciproque d'une AL (si elle existe) sont des AL

### II/ Noyau et image

1. Noyau
   - Définition : Ker($f$) est l'ensemble des antécédents de $0_F$
   - Proposition : Ker($f$) est un sev de $E$
   - Proposition : $f$ est injective $\Leftrightarrow$ Ker($f$) $= \{0_E\}$
2. Image
   - Définition : Im($f$) $= f(E)$
   - Proposition : Im($f$) est un sev de $F$
   - Proposition : $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ Im($f$) $= F$
   - Proposition : si $E$ a pour base $B = (e_1, \dots, e_p)$, alors Im($f$) =Vect$\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$

### III/ Applications linéaires en dimension finie

1. Reconnaître une application linéaire en dimension finie
   - Proposition : toute application $f$ qui va de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de la forme $f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \left(a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \,,\, \dots \,,\, a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p\right)$ est linéaire
2. Construction par choix de l'image d'une base
   - Proposition : si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ et si $(U_1, \dots, U_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, alors il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = U_j$
3. Conséquence de la caractérisation : matrice d'une application linéaire
   - Définition : matrice d'une application linéaire
   - Correspondance entre calcul d'une image et calcul d'un produit matriciel
4. Matrice d'une application linéaire et opérations
   - Proposition : matrice de $f + g$, de $\lambda f$, de $g \circ f$
   - Proposition : $f$ est bijective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{B',B}(f)\right)^{-1}$
5. Image d'une base
   - Proposition : en notant $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ ; $f$ est injective ssi $\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$ est libre ; $f$ est srujective ssi $\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$ ; $f$ est bijective ssi $\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$

### IV/ Rang d'une application linéaire

1. Définition
   - Définition : $\mathrm{rg}(f)$ est la dimension de Im($f$)
   - Proposition : lien entre les différentes notions de rang (d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire)
2. Théorème du rang
   - Théorème du rang
   - Théorème : pour $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ ; $f$ est injective ssi $\mathrm{rg}(f) = p$ ; $f$ est surjective ssi $\mathrm{rg}(f) = n$ ; $f$ est bijective ssi $\mathrm{rg}(f) = n = p$
   - Corollaire : pour un endomorphisme $f$, $f$ est injective ssi $f$ est surjective ssi $f$ est bijective

## Questions de cours

1. *Avec preuve*
   Donner la définition du noyau d'une application linéaire et démontrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
2. *Avec preuve*
   Donner la définition de l'image d'une application linéaire et démontrer que l'image d'une application linéaire est un espace vectoriel.
3. *Sans preuve*
   Enoncer la proposition qui permet de déterminer l'image d'une application linéaire en dimension finie ainsi que la proposition sur la construction par choix de l'image d'une base.
4. *Avec preuve*
   Proposition de caractérisation du caractère injective/surjectif/bijectif par l'image d'une base.
5. *Avec preuve*
   Enoncer sans preuve le théorème du rang et en déduire avec preuve les deux autres résultats du paragraphe "Théorème du rang".