

Nom :

Interrogation 13 - Mardi 29 avril 2025

Septembre - Octobre

TD
Log, ens,
raison.

ex 16

1. Soient A, B et C trois ensembles.

On veut démontrer que :

$$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$$

La structure globale du raisonnement est :

Double implication

2. Il faut démontrer que, pour tout
- $n \in \mathbb{N}^*$
- :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Quelle(s) méthode(s) envisagez-vous ?

DM1 $\rightarrow$ récurrence

- somme des q^k et calcul direct

TD
Suites
usuelles
ex 3

3. On définit la suite
- (u_n)
- par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$$

On veut exprimer le terme général de (u_n) .

Quelles sont les étapes ?

- point fixe
- suite auxiliaire (qui est géométrique)
- terme général (de la suite auxiliaire puis de (u_n))

4. On considère la suite
- (u_n)
- définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -5 \\ u_2 = 13 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} + 2u_n$$

On anticipe que la nature de (v_n) va être :récurrence linéaire d'ordre 2
sans second membre

Pour le démontrer, on commence en écrivant :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} + 2u_{n+2} \\ &= 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} \end{aligned}$$

5. On définit pour tout
- $n \in \mathbb{N}^*$
- :

$$W_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$$

La première question fait démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, (k+1)! - k! = k \times k!$$

Comment s'y prend-on ensuite pour calculer W_n ?

- on remplace $k \times k!$ dans la somme
- somme télescopique

DM2

DS1

DS1 6. On veut résoudre $|x^2 + 6x + 5| \leq x + 5$ d'inconnue le réel x .

Les bons réflexes sont :

- on étudie le signe de $x^2 + 6x + 5$
- on distingue des cas pour enlever la valeur absolue

X 7. On veut résoudre $\frac{x^2 + 4}{x + 1} \leq 3x + 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Les bons réflexes sont :

- ensemble de définition
- tout passer du même côté
- même dénominateur
- tableau de signes

DS5 8. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

Avant même de lire les questions, à quoi pense-t-on ?

$$a^b = e^{b \ln a}$$

TD Trigo ex 7 9. On veut résoudre $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = \sqrt{2}$ d'inconnue le réel x .

Comment commence-t-on ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left[\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right] = \sqrt{2}$$

DM3 10. On demande de résoudre l'équation $z^5 = 1$ d'inconnue le nombre complexe z .

Comment débute-t-on les calculs ?

DS2 On écrit z sous forme exponentielle.

$$z = re^{i\theta} \text{ avec } r > 0, \theta \in \mathbb{R}$$

DS2 11. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on définit le système à paramètre (S_m) par :

$$(S_m) : \begin{cases} -(5+m)x + 3y = 0 \\ 6x - (2+m)y = 0 \end{cases}$$

Quelle est la première chose à faire ?

Echanger les lignes.

Au cours de la résolution, on arrive à l'étape :

$$\begin{cases} 6x - (2+m)y = 0 \\ (-m^2 - 7m + 8)y = 0 \end{cases}$$

Les cas à distinguer sont :

- $m = 1$
- $m = -8$
- $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -8\}$

Novembre - DécembreInterro
de l'an
dernier

1. En Python, on peut modéliser une série statistique par deux listes ; une liste X contenant les modalités et une liste N contenant les effectifs associés.

On souhaite calculer la moyenne ; comment parcourt-on les listes ?

Sur les indices

DM4

2. On définit la fonction f par :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\\ x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$$

On veut démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque. Comment commence-t-on la rédaction ?

Soit $y \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ fixéOn cherche $x \in \mathbb{R}^* \text{ tq :}$

$$y = f(x)$$

 $\Rightarrow \dots$ Interro
de l'an
dernier

3. Pour chaque fonction usuelle, quelle est la liste des propriétés à connaître ?

- ensemble de définition
- parité, périodicité
- injective, surjective, bijective
- dérivée
- représentation graphique

DM5

4. On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On veut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n A^2$.

Quelle est la bonne méthode ?

récurrence

5. On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 2 \\ 18 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A - 2I_3$.

On demande de calculer B^2 puis de déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n en fonction de B et n .

Quelle est la méthode ?

conjecture (calcul de B^2, B^3)
puis récurrence

6. On reprend la situation précédente.

On demande d'en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n en fonction de A , I_3 et n .

Que fait-on ?

on isole $A = B + 2I_3$
formule du binôme de
Newton

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

On admet que ces intégrales sont correctement définies. On veut établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

Quelle méthode utilise-t-on ?

IPP

8. On note $I = \int_0^1 x e^{x^2} dx$.

On admet que I est correctement définie.

Comment calcule-t-on I ?

primitive

9. Dans un exercice, on a une fonction f qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(-t).$$

Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f''(t) = -f'(-t) \quad (\text{en fonction de } f')$$

$$= -f(t) \quad (\text{en fonction de } f)$$

(dérivée d'une composée)

10. Dans l'espace, d_1 est la droite passant par $A(2, 1, 2)$ et $B(1, 0, 1)$. d_2 est définie par :

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

On veut déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à la fois à d_1 et à d_2 .

Quelle(s) méthode(s) semble(nt) adaptée(s) ?

analyse - synthèse

DS3

DS3

DS4

Interro de
l'an
dernierInterro de
l'an
dernier

DS4

Janvier - Février

DS4

1. On considère des grilles rectangulaires de mots croisés ayant 6 lignes, 7 colonnes et 10 cases noires (toutes les autres cases sont vides).

Sans justifier, combien peut-on former de telles grilles différentes ?

$$\binom{42}{10}$$

DS4

2. On reprend les données de la question précédente.

On fixe une grille.

Sans justifier, combien y a-t-il de façons de la remplir (avec l'alphabet latin, sans accent, avec des mots n'ayant pas nécessairement de sens) ?

$$26^{32}$$

DS5

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$u_n = S_n - 2\sqrt{n}$$

On veut étudier la monotonie de (u_n) .

On commence la rédaction par :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1} - u_n = \dots$$

DS5

4. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{u_n + 1} \end{cases}$$

On admet que (u_n) est correctement définie.

On veut étudier la monotonie de (u_n) .

Que fait-on ?

- on pose $f: x \mapsto \frac{2x^2}{x+1}$
- on étudie les variations de f
- on conjecture la monotonie de (u_n)
- on démontre par récurrence

5. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On veut démontrer que (u_n) admet une limite.

Quel est le bon outil ?

Théorème de la limite monotone.

Si on essaie d'encadrer :

$$1 \leq k \leq n$$

$$1 \geq \frac{1}{k} \geq 0$$

$$n \geq u_n \geq 1 \text{ et on n'arrive pas à conclure.}$$

6. On définit $P: x \mapsto x^3 + 3x - 14$.

Comment s'y prend-on pour résoudre $P(x) = 0$ d'inconnue le réel x ?

on cherche une racine évidente et on factorise.

DS2

7. On veut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n): e^x + x = n$ admet une unique solution réelle.

Quel est le bon outil ?

le théorème de la bijection

8. On définit la fonction $f: x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$.

On demande de démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur un ensemble à préciser.

Quel est le bon outil ?

le théorème de la bijection

variante
Q2 de
Nov - Déc.

A quoi faut-il faire attention en utilisant cet outil ?

l'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle.

9. On pose $f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 4}{2x^3 + 5}$.

Quel est le bon outil pour étudier la limite de f en $+\infty$?

les équivalents.

10. On pose $f: x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Quel est le bon outil pour étudier la limite de f en 0 ?

on encadre le sinus puis
théorème des gendarmes.

Et non, si $x \rightarrow 0$, on ne
PEUT PAS utiliser
d'équivalents usuel pour $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

ex 3

TD
Suites
réelles
ex 6

Mars - Avril

- ✗ 1. On pose $A = \left\{ (a+b, -a-2b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Démontrer en une ligne que A est un espace vectoriel :

$$A = \text{Vect} \left((1, -1), (1, -2) \right)$$

- ✗ 2. On définit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0 \text{ et } x+z=0 \right\}$.
On veut justifier que F est un espace vectoriel.
Comment commence-t-on la rédaction ?

$$\text{Soit } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

- ✗ 3. On reprend l'ensemble F de la question précédente.
On veut déterminer la dimension de F .
Quelles sont les étapes ?

- on écrit F sous forme de Vect
- on extrait une base de la famille génératrice obtenue
- on compte les vecteurs de cette base

- Intensité de l'an dernier 4. Soient a, b, c des réels deux à deux distincts.
On pose $u = (1, a, a^2)$, $v = (1, b, b^2)$ et $w = (1, c, c^2)$.
On veut démontrer que la famille (u, v, w) est libre.
Le début de la rédaction est :

$$\text{Soit } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On résout } xu + yv + zw = (0, 0, 0)$$

A la fin des calculs, pour pouvoir déduire que la famille est libre, on anticipe qu'il faut trouver :

$$x = y = z = 0$$

- ✗ 5. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$.
 f est définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
On veut étudier l'ensemble sur lequel f est dérivable.
La rédaction commence par :

$$\text{Soit } x \in D$$

$$f'(x) \text{ existe } \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$$

⚠ Racine n'est pas dérivable en 0

6. On dispose de deux dés A et B à 6 faces équilibrés :

- Le dé A a 4 faces noires et 2 faces blanches.
- Le dé B a 2 faces noires et 4 faces blanches.

On lance d'abord une pièce de monnaie équilibrée. Si on obtient pile, on fait des lancers successifs avec le dé A et si on obtient face on fait des lancers successifs avec le dé B .

On veut calculer la probabilité d'obtenir noir au premier lancer.

Quel est le premier réflexe de rédaction ?

définir des événements

7. On reprend la situation de la question précédente.
Quelle est la bonne formule de probabilité ?

formule des probabilités totales

8. On définit f par :

$$f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

la D.E.J.A. a été prolongée

On veut "faire l'étude de f au voisinage de 0".

Qu'est-ce que cela veut dire, précisément ?

- vérifier que f a été prolongée correctement
- vérifier si f est dérivable en 0
- si oui, donner l'équation de la tangente et étudier la position courbe/tangente

9. On pose $f : x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

On note C la représentation graphique de f .

On veut étudier l'éventuelle asymptote de C au voisinage de $+\infty$.

On fait le changement de variable :

$$x = \frac{1}{x} \quad \text{REFLEXE}$$

La première ligne de calcul est donc :

$$f(x) = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}\right)$$