Inégalités

Prérequis

Manipulations d'inégalités. Cours sur l'intégration. Suites numériques.

Dès le début de 1ère année.

Pour répondre vrai, donner une démonstration.
Pour répondre faux, montrer que c'est absurde ou donner un contre-exemple.

Pour s'échauffer

Calcul 23.1

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b tels que : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$

a) $-4 < a + b < -1$ ....

b) $6 < a - b < 5$ ....

c) $-19 < 3b - 2a < -11$ ....

d) $-5 < ab < -6$ ....

e) $\dfrac{-2}{3} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{-1}{5}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$ ....

g) $a^2 \leqslant a$ ....

h) $\forall n \in \mathbb{N},\ (-5)^n < b^n < (-3)^n$ ......

Calcul 23.2

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b

a) $-ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ....

b) $\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \leqslant ab$ ....

c) $|a| \leqslant 1 + a^2$ ....

d) $a(1 - a) \leqslant \dfrac{1}{4}$ ....

Calcul 23.3

Vrai-Faux : Soit x un réel

a) $\sin(x) \leqslant (\sin(x))^2$ ....

b) $(\sin(x))^2 \leqslant \sin(x)$ ....

c) $(\sin(x))^2 \leqslant |\sin(x)|$ ....

d) $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin(x)|$ ....

Pour comparer des intégrales

Calcul 23.4

Vrai-Faux : On note (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{1+x}dx$.

Soient x un réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$ et n un entier naturel.

a) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$ ....

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x}$ ....

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$ ....

d) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

e) La suite $(u_n)_n$ est décroissante. ...

f) La suite $(u_n)_n$ est bornée. ....

g) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. ....

Calcul 23.5

Vrai-Faux : On note (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(\ln(x))^n}{1+x}\,dx$.

Soient x un réel tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et n un entier naturel.

a) $(\ln(1/2))^n \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$ ....

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x}$ ....

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$ ....

d) La suite $(u_n)_n$ est monotone. ......

e) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. ....

Pour comparer des sommes

Calcul 23.6

Vrai-Faux : On note $(T_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $0 \leqslant T_n \leqslant n$ ....

b) $\dfrac{1}{2} \leqslant T_n \leqslant 1$ ....

c) $T_{n+1} \leqslant T_n$ ....

d) $T_n \leqslant T_{n+1}$ ....

e) La suite $(T_n)_n$ converge. ....

Calcul 23.7

Vrai-Faux : On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = -2\sqrt{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

a) $u_{n+1} \leqslant u_n$ ....

b) $u_n \leqslant u_{n+1}$ ....

c) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

d) La suite $(u_n)_n$ est bornée. ....

Réponses mélangées

Faux Faux Vrai Vrai Vrai Faux Faux Vrai Vrai

Vrai Vrai Vrai Vrai Vrai Vrai Vrai Vrai Faux Vrai

Vrai Faux Faux Vrai Faux Vrai Vrai Faux Faux

Faux Vrai Vrai Faux Faux Vrai Faux Vrai Faux