Fiche n° 23. Inégalités

Réponses

23.1 a)	Vrai	**23.4** d)	Faux
23.1 b)	Faux	**23.4** e)	Vrai
23.1 c)	Vrai	**23.4** f)	Vrai
23.1 d)	Faux	**23.4** g)	Vrai
23.1 e)	Vrai	**23.5** a)	Faux
23.1 f)	Vrai	**23.5** b)	Faux
23.1 g)	Faux	**23.5** c)	Faux
23.1 h)	Faux	**23.5** d)	Faux
23.2 a)	Vrai	**23.5** e)	Vrai
23.2 b)	Faux	**23.6** a)	Vrai
23.2 c)	Vrai	**23.6** b)	Vrai
23.2 d)	Vrai	**23.6** c)	Faux
23.3 a)	Faux	**23.6** d)	Vrai
23.3 b)	Faux	**23.6** e)	Vrai
23.3 c)	Vrai	**23.7** a)	Vrai
23.3 d)	Vrai	**23.7** b)	Faux
23.4 a)	Vrai	**23.7** c)	Vrai
23.4 b)	Faux	**23.7** d)	Vrai
23.4 c)	Vrai		

Corrigés

23.1 a) $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ donc *(somme membre à membre de deux encadrement)* $1-5 < a+b < 2-3$

23.1 b) On n'a jamais $6 < a-b < 5$ car $6 > 5$. En effet, on ne peut soustraire des inégalités, éventuellement multiplier par -1 (avec précaution) puis sommer, ce qui donne $4 < a-b < 7$

23.1 c) $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ donc $-4 < -2a < -2$ et $-15 < 3b < -9$

donc *(somme membre à membre de deux encadrements)* $-4-15 < 3b-2a < -2-9$

23.1 d) On n'a jamais $-5 < ab < -6$ car $-5 > -6$

23.1 e) $-5 < b < -3$ donc ($x \to -\dfrac{1}{x}$ *croissante sur* $\mathbb{R}_-^*$) $\dfrac{1}{5} < -\dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{3}$

de plus $1 < a < 2$, donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $\dfrac{1}{5} < -\dfrac{a}{b} < \dfrac{2}{3}$

23.1 f) D'une part $1 < a < 2$ donc $0 < \sqrt{a-1} < 1$, d'autre part $-5 < b < -3$ donc $0 < \dfrac{1}{b^2} < \dfrac{1}{25}$

donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$

23.1 g) $1 < a < 2$ donc $a > 1$ et $a - 1 > 0$ ce qui donne $a^2 - a > 0$ par produit d'inégalités à termes positifs.

23.1 h) faux en prenant par exemple pour $n = 2$

23.2 a) $-ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff (a+b)^2 \geqslant 0$

23.2 b) Il suffit de prendre comme contre-exemple $(a, b) = (1, 0)$

23.2 c) 1er cas : Si $|a| \leqslant 1$, alors $|a| \leqslant 1 + a^2$, 2ème cas : Si $|a| > 1$ alors $|a|^2 > |a|$ donc $|a| \leqslant 1 + a^2$

23.2 d) $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4} \iff a^2 - a + \frac{1}{4} \geqslant 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

23.3 a) Contre-exemple : $x = \frac{\pi}{6}$

23.3 b) Contre-exemple : $x = -\frac{\pi}{6}$

23.3 c) $|\sin(x)| \leqslant 1$ donc on multipliant par $|\sin(x)| \geqslant 0$ il vient $(\sin(x))^2 \leqslant |\sin(x)|$

23.3 d) On sait que $1 - \cos(2x) = 2(\sin(x))^2$ et en utilisant le résultat de la question précédente on obtient : $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin(x)|$

23.4 a) comme $x \in [1, 2]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ donc $0 \leqslant (\ln(x))^n \leqslant (\ln(2))^n$ et $0 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1$.

donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $0 \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{x+1} \leqslant (\ln(2))^n$

23.4 b) Contre-exemple : $x = 2$ et $n = 1$ sachant que $0 < \ln(2) < 1$ donc $\ln(2)^2 < \ln(2)$

23.4 c) comme $x \in [1, 2]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$ donc $0 \leqslant \frac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x}$

23.4 d) Contre-exemple : $x = 1$ et $n = 1$

23.4 e) On a vu que pour tout $x \in [1, 2]$, $\frac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x}$, donc *(croissance de l'intégrale)* $u_{n+1} \leqslant u_n$

23.4 f) On a vu que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$, donc *(croissance de l'intégrale)* $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$, comme $0 < \ln(2) < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

23.4 g) On a vu que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$, donc *(croissance de l'intégrale)* $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$, comme $-1 < \ln(2) < 1$, en utilisant le théorème des gendarmes on obtient que (u_n) converge vers 0.

23.5 a) Contre-exemple : $x = 1$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

23.5 b) Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

23.5 c) Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

23.5 d) $u_1 < 0$, $u_2 > 0$ et $u_3 < 0$ donc $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$.

23.5 e) $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_{1/2}^{1} \left| \frac{(\ln(x))^n}{1+x} \right| \mathrm{d}x$ or pour tout $x \in [1/2;1]$, $0 \leqslant |\ln(x)| \leqslant \ln(2)$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$.

Donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(\ln(2))^n$ de plus $-1 < \ln(2) < 1$ donc ()*théorème des gendarmes*) (u_n) converge vers 0.

23.6 a) Chacun des n termes de la somme est compris entre 0 et 1.

23.6 b) Chacun des n termes de la somme est compris entre $\dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$.

23.6 c) $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

23.6 d) $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$

23.6 e) La suite (T_n) est croissante majorée donc elle converge.

23.7 a) $u_{n+1} - u_n = -2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

23.7 b) $u_{n+1} - u_n = -2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$

23.7 c) D'une part : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. D'autre part : $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

23.7 d) En sommant les encadrements précédents et en simplifiant les sommes télescopiques, il vient :

$$\sqrt{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{n}$$

donc $-2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 0$ et comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geqslant 0$ donc $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$
