Intégration

Calculs d'intégrales

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 x \arctan(x)\, dx$
2. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$
3. $\int_{-1}^2 xe^{-x^2}\, dx$
4. $\int_1^e x^n \ln(x)\, dx$ $(n \in \mathbb{N})$
5. $\int_1^0 \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}\, dx$
   On pourra utiliser le changement de variable $t = 2x - 1$.

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 \arctan(x)\, dx$
   On pourra utiliser une intégration par parties.
2. $I = \int_0^1 \ln(1 + x^2)\, dx$
   On pourra utiliser une intégration par parties.
3. $\int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$
4. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$
   On pourra utiliser le changement de variable $x = \sin(\theta)$.

Exercice 3

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que, pour tout $x \in D_f$:
$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$
2. En déduire $\int_{-1}^0 f(x)\, dx$.

Exercice 4

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt$.
Montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.
On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

Exercice 5

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

1. Vérifier que : $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$.
2. On suppose que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(a + b - x) = f(x)$.
   Exprimer $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)\, dx$.
3. Calculer $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)}\, dt$.

Exercice 6

On définit C et S par :
$$C = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)}\, dt$$
$$S = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)}\, dt$$

1. A l'aide d'un changement de variable, démontrer que $C = S$.
2. Calculer $C + S$ puis en déduire les valeurs de C et S.
3. A l'aide d'un changement de variable, calculer :
$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$$

Sommes de Riemann

Exercice 7

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(n + k)\right) - \ln n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$

Exercice 8

Donner un équivalent en $+\infty$ de $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n + 2k)^3}$.

Suites d'intégrales

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $I_k = \int_0^1 x^k (1 - x)^{n-k}\, dx$.

1. Calculer I_0.
2. Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n - 1]\!]$.
3. Donner la valeur de I_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1 - t)^n e^{-2t}\, dt$.

1. Montrer que la suite (I_n) est bien définie.
2. Etudier les variations de la suite (I_n).
3. Déterminer le signe de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier alors que la suite (I_n) est convergente.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (I_n).
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$2I_{n+1} = 1 - (n + 1)I_n$$

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que la suite (I_n) converge.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} ($n \in \mathbb{N}$).
4. En déduire que la suite (I_n) converge vers 0 et donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 12

On définit f sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par :
$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} \, dt$.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) \leqslant x$.

Exercice 13

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_1) \ : \ y'' + y = -\sin(x)$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda x \cos(x) + \mu x \sin(x)$ *où* λ *et* μ *sont des réels.*

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On note F la primitive de f qui s'annule en 0.
On note G la primitive de $t \mapsto t\,f(t)$ qui s'annule en 0.
On définit la fonction φ par :

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t) \, dt$$

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de F et G.
   (b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. On considère dans cette question l'équation intégrale (E_2) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sin(x) - \int_0^x (x-t)\, f(t) \, dt$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que, si f est solution de (E_2), alors f est solution de (E_1).

4. Résoudre alors (E_2).

Exercice 14

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^x f(t) \, dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. On définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction F par :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$$

   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de F en 0 en fonction de $f(0)$.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (c) Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $G'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Approfondissement

Exercice 15

Soit $a \in]\,0\,, +\infty\,[$.
On considère une fonction f continue définie sur $[-a, a]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que f est paire.
Démontrer que :

$$\int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = -t$.

2. On suppose dans cette question que f est impaire.
Démontrer que :

$$\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = -t$.

Exercice 16

Soit $T \in]\,0\,, +\infty\,[$.
On considère une fonction f continue définie sur $\mathbb{R}$, $T-$périodique.
Démontrer que :

$$\forall a > 0\,, \ \int_a^{a+T} f(t) \, dt = \int_0^T f(t) \, dt$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = t - T$.

Exercice 17

Soit $f : [a, b] \to [\,0\,, +\infty\,[$ continue.
On suppose que $\int_a^b f(t) \, dt = 0$.
Démontrer que f est constante égale à 0.