Devoir Surveillé n°7 - Partie 2 - Mathématiques

Samedi 10 mai 2025 - Durée : 2h15

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

On définit la fonction f par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1-e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

On note C sa représentation graphique.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à C en son point d'abscisse 0 et tracer la représentation graphique de f au voisinage de 0.

Exercice 2

On dispose de deux pièces : une équilibrée et une déséquilibrée, qui donne "face" avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$.

Malheureusement, on ne sait pas les discerner. On souhaite avoir le plus de chance d'obtenir Face après un nombre suffisamment grand de lancers. Pour cela, on propose deux stratégies différentes.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement "jouer avec la pièce équilibrée au $n^{\text{ème}}$ lancer" et F_n l'événement "obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer".

1. Stratégie 1
   Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard. Si elle donne Face, on continue de jouer avec cette pièce, sinon on joue avec l'autre. Dans les deux cas, on ne change plus de pièce par la suite.
   (a) Calculer $P(F_1)$.
   (b) Calculer $P(E_2)$ puis $P(F_2)$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n) = \dfrac{43}{72}$.
2. Stratégie 2
   Au premier lancer, on choisit une des deux pièces au hasard. Si elle donne Face, on joue avec cette pièce au deuxième lancer, sinon on joue avec l'autre. Si, au deuxième lancer, on obtient Face, on conserve la même pièce au troisième lancer, sinon on joue avec l'autre. Et ainsi de suite : on décide ainsi à chaque lancer la pièce qu'on utilisera au lancer suivant.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(E_{n+1}) = \dfrac{1}{6}P(E_n) + \dfrac{1}{3}$.
   (b) En déduire une expression de $P(E_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(F_n) = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10 \times 6^n}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n)$.
3. Quelle stratégie permet d'avoir le plus de chance d'obtenir "face" à long terme ?

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de certaines applications linéaires particulières.

Dans tout l'exercice, on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$; on notera 0_E son vecteur nul et $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

On note également P l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de E tels que :

$$2x - y + z = 0$$

Partie A

1. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E, identifier sa nature géométrique et trouver une base de P.
2. Déterminer un vecteur non nul v orthogonal à tout vecteur de P.
3. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de E.
   On note u_p le projeté orthogonal de u sur P.
   On rappelle que u_p est alors l'unique vecteur de E tel que u_p appartienne à P et $u - u_p$ soit orthogonal à P
   Montrer que :

$$u_p = \frac{1}{6}\Big(2x + 2y - 2z \ , \ 2x + 5y + z \ , \ -2x + y + 5z \Big)$$

Partie B

Dans toute la suite de cet exercice, on nomme p l'application qui, à tout vecteur u de E, associe le vecteur u_p définie dans la partie précédente.

1. Montrer que p est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de p dans la base canonique B.
3. Déterminer une base (b_1) de Ker (p).
4. Déterminer une base (b_2, b_3) de Im (p).
5. Montrer que $B' = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E.
6. Déterminer la matrice N de p dans la base B'.

Partie C

On appelle projecteur de E tout endomorphisme f de E tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que l'application p de la partie précédente est un projecteur de E.
2. Montrer que l'application identité $\mathtt{id}_E$ est le seul projecteur bijectif de E.
3. Soit f un projecteur de E.
   On note $F = \text{Ker } (f)$ et $G = \text{Ker } (f - \mathtt{id}_E)$.
   (a) Montrer que $F \cap G = \{ (0, 0, 0) \}$.
   (b) Montrer que $G = \text{Im } (f)$.
   (c) Montrer que $\dim (F) + \dim (G) = 3$.
   (d) Montrer que la réunion d'une base quelconque de F et d'une base quelconque de G est une base de E.